Chapitre 7

Courbes paramétrées

7.1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction

$$\overrightarrow{F} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t),y(t)\big) \end{cases}$$

Définition 7.1 : Limite d'une fonction vectorielle
Soit $\overrightarrow{l} = (l_1,l_2) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$. On dit que $\overrightarrow{F(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{l}$ lorsque $\|\overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{l}\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

Proposition 7.1 : Caractérisation par les fonctions coordonnées

$$\overrightarrow{F}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} (l_1,l_2) \iff \begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} l_1 \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} l_2 \end{cases}$$

Définition 7.2 : Dérivée d'une fonction vectorielle
On dit qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{F} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t),y(t)\big) \end{cases}$ est dérivable au point $t_0 \in I$ lorsqu'il existe $\overrightarrow{l} = (l_1,l_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{l}$$

On note alors $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{F}'(t_0)$.

Proposition 7.2 : Caractérisation par les fonctions coordonnées
La fonction $\overrightarrow{F}$ est dérivable en t_0 si et seulement si les deux fonctions réelles x et y sont dérivables en t_0 et alors $\overrightarrow{F}'(t_0) = \big((x'(t_0),y'(t_0)\big)$.

Théorème 7.3 : Dérivation d'un produit scalaire et d'un déterminant
On considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{F_1} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x_1(t),y_1(t)) \end{cases}, \quad \overrightarrow{F_2} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x_2(t),y_2(t)) \end{cases}$$

On peut alors définir deux fonctions à valeurs réelles :

$$\phi(t) = \overrightarrow{F_1}(t).\overrightarrow{F_2}(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$$

$$\psi(t) = \operatorname{Det}\big(\overrightarrow{F}(t),\overrightarrow{G}(t)\big) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = x_1y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$$

Alors si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont dérivables sur I, le produit scalaire et le déterminant précédent sont dérivables et $\forall t \in I$:

$$\phi'(t) = \overrightarrow{F}'(t).\overrightarrow{G}(t) + \overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}'(t)$$

$$\psi'(t) = \operatorname{Det}\big(\overrightarrow{F}'(t),\overrightarrow{G}(t)\big) + \operatorname{Det}\big(\overrightarrow{F}(t),\overrightarrow{G}'(t)\big)$$

Théorème 7.4 : Dérivation de la norme
Soit une fonction vectorielle dérivable $\overrightarrow{F} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t),y(t)\big) \end{cases}$ qui ne s'annule pas sur I. Alors la fonction norme :

$$\phi : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|\overrightarrow{F}(t)\| \end{cases}$$

est dérivable sur I et $\forall t \in I$,

$$\boxed{\phi'(t) = \frac{\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}}$$

7.2 Courbes paramétrées

Dans ce qui suit, on considère l'espace $E = \mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel.

Définition 7.3 : Courbes paramétrées planes
Soit $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une fonction à valeurs dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k$. On appelle courbe paramétrée la donnée du couple $(I,\overrightarrow{F})$. L'ensemble des points $f(I)$ s'appelle le *support* de la courbe.

Remarque 47. Le point $M(t)$ du plan défini par la relation $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t)$ se déplace sur le support de la courbe. Sa vitesse instantanée à la date t est donnée par $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{F'}(t)$ et son accélération par $\overrightarrow{F''}(t)$.

Définition 7.4 : Point régulier, birégulier
Le point $M(t)$ de la courbe est dit *régulier* lorsque $\overrightarrow{F'}(t) \neq 0$. Dans le cas contraire, on dit que $M(t)$ est un *point stationnaire*.

Définition 7.5 : Tangente en un point d'une courbe paramétrée
Soit $M(t_0)$ un point d'une courbe paramétrée $(I,\overrightarrow{F})$. On dit que la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ lorsqu'il existe une fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{u}(t)$ telle que :

1. $\forall t \neq t_0$, le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ dirige la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$;
2. $\overrightarrow{u}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. (limite *non-nulle*).

La droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'appelle alors la tangente à la courbe au point $M(t_0)$.

Théorème 7.5 : Tangente en un point régulier
Soit $M(t_0)$ un point régulier d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire $\boxed{\overrightarrow{F'}(t_0) \neq 0}$. Alors la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{F'}(t_0)$.

Remarque 48. La courbe définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\overrightarrow{F}(t) = \begin{cases} (e^{-1/t^2},0) & \text{si } t > 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \\ (0,e^{-1/t^2}) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais elle ne possède pas de tangente au point $M(0) = (0,0)$.

Remarque 49. Il se peut que $\overrightarrow{F'}(t_0) = \overrightarrow{0}$ et que la courbe admette une tangente en $M(t_0)$. Par exemple $\overrightarrow{F}(t) = (t^2,t^2)$. Nous verrons plus tard comment faire l'étude locale complète d'une courbe en un point stationnaire à l'aide des développements limités.

PROPOSITION 7.6 : **Tangente en un point stationnaire**
On considère un point $M(t_0)$ stationnaire d'une courbe $(I,\overrightarrow{F})$.

1. Si $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \xrightarrow[t \to t_0]{} m \in \mathbb{R}$, la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente de pente m.
2. Si $\left|\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}\right| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$, la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente verticale.

DÉFINITION 7.6 : **Branches infinies**
Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que la courbe présente une *branche infinie* lorsque $t \to t_0$ si et seulement si $\|F(t)\| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$.

DÉFINITION 7.7 : **Droite asymptote**
Soit un arc paramétré $(I,\overrightarrow{F})$ et une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. On dit que la droite $\mathcal{D}$ est *asymptote* à la courbe au voisinage de t_0 lorsque $d\big(M(t),\mathcal{D}\big) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$. C'est équivalent à dire que

$$\boxed{ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t \to t_0]{} 0}$$

1. Si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$, la droite $x = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $x(t) - l$ (voir le tableau de variations) donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote ;
2. Si $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$, la droite $y = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $y(t) - l$ (voir le tableau de variations) donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote ;
3. Si $x(t)$ et $y(t)$ tendent toutes les deux vers l'infini lorsque $t \to t_0$, on forme $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ et on cherche la limite de ce quotient lorsque $t \to t_0$. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}$, on forme ensuite $y(t) - ax(t)$ et si cette quantité tend vers une limite finie b, alors la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to t_0$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$;
4. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$, on dit que la courbe présente une *branche parabolique* (Oy) ;
5. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$, on dit que la courbe présente une branche parabolique (Ox).

Exercice 7-1

Étudier les branches infinies de la courbe définie par

$$x(t) = \frac{t^3}{t^2 - 9}, \quad y(t) = \frac{t^2 - 2t}{t - 3}$$

7.3 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

On considère une courbe paramétrée $\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array} \right.$.

1. Domaine de définition de $x(t)$ et $y(t)$;

2. Réduction de l'intervalle d'étude. Que peut-on dire lorsque :
   - $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$?
   - $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$?
   - x et y sont T-périodiques ?
   - $x(t) = t + \frac{1}{t}, y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$?
3. Variations de $x(t)$ et $y(t)$. On rassemble les résultats dans un même tableau ;
4. On repère dans le tableau les points stationnaires correspondant à $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ et les branches infinies (lorsque l'une des fonctions a une limite infinie) ;
5. Etude des branches infinies ;
6. Tracé de la courbe: on représente avant tout les asymptotes, les points stationnaires, les points à tangente verticale et horizontale et on ébauche le tracé de la courbe.

Exercice 7-2

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t + \dfrac{1}{2t+1} \\ y(t) &= t^2 - \dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$$

Exercice 7-3

Une roue de rayon R roule sans glisser sur une route. Déterminer la trajectoire d'un point de sa circonférence. Cette courbe s'appelle la *cycloïde*

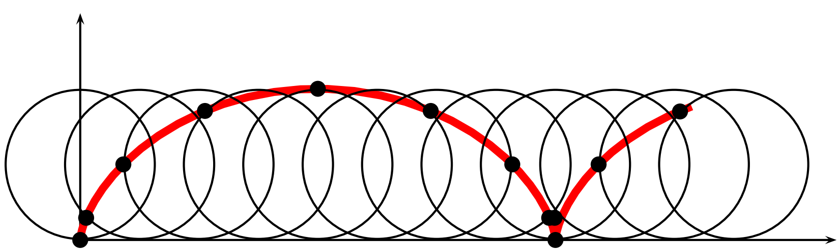

FIG. 7.1 – *Cycloïde*

Exercice 7-4

Tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^2 t \end{cases}$$

Cette courbe s'appelle l'*astroïde*.

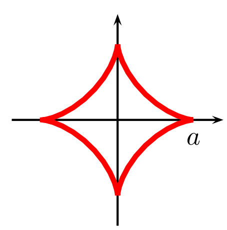

FIG. 7.2 – *Astroïde*

7.4 Courbes polaires.

On définit les fonctions vectorielles :

$$\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$$

et on remarque que :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \overrightarrow{v}, \quad \frac{d\overrightarrow{v}}{d\theta} = -\overrightarrow{u}$$

Le repère $\mathcal{R}_\theta = \big(O,\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta)\big)$ s'appelle le *repère polaire*.

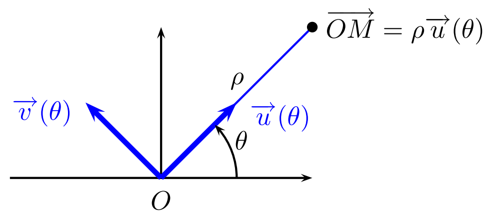

FIG. 7.3 – *Repère polaire :* $\mathcal{R}_\theta = (O,u(\theta),v(\theta))$

Étant données deux fonctions $\rho : I \mapsto \mathbb{R}$ et $\theta : I \mapsto \mathbb{R}$, on peut définir la courbe paramétrée $(I,\overrightarrow{f})$ par

$$\boxed{\overrightarrow{F}(t) = \rho(t)\overrightarrow{u}(\theta(t))}$$

PROPOSITION 7.7 : **Calcul de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire**

$$\overrightarrow{F'}(t) = \rho'(t)\overrightarrow{u}\big(\theta(t)\big) + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v}\big(\theta(t)\big)$$

$$\overrightarrow{F''}(t) = \big[\rho''(t) - \rho(t)\theta'^2(t)\big]\overrightarrow{u}\big(\theta(t)\big) + \big[2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t)\big]\overrightarrow{v}\big(\theta(t)\big)$$

7.4.1 Etude d'une courbe $\rho = f(\theta)$.

On considère une courbe polaire

$$\rho = f(\theta)$$

où $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, (avec $k \geq 2$). C'est l'ensemble des points du plan de coordonnées polaires (ρ,θ) liés par cette relation. Notre but est de tracer une telle courbe.

1. Une courbe polaire est une courbe paramétrée particulière : $\overrightarrow{F}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$,

$$\begin{cases} x(\theta) & = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) & = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

2. *Etude locale*
   - On exprime $\overrightarrow{F'}(\theta)$ dans la base $(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))$:

$$\overrightarrow{F'}(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u} + \rho(\theta)\overrightarrow{v}$$

   - Les points stationnaires ne peuvent correspondre qu'au passage au pôle. On obtient l'allure locale de la courbe en examinant le signe de ρ : un point stationnaire pour une courbe polaire ne peut être qu'un *point ordinaire* (ρ change de signe) ou un *rebroussement de première espèce* (ρ ne change pas de signe) ;
   - En un point différent de l'origine (donc régulier), si $V(\theta)$ est l'angle entre la droite $(OM(\theta))$ et la tangente à la courbe en $M(\theta)$, alors :

$$\boxed{\tan V(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$$

3. Etude des branches infinies :
   - Elles se produisent lorsque $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \infty$;
   - Si $\theta_0 = k\pi$, (Ox) est direction asymptotique. Il suffit d'étudier :

$$y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$$

   - Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, il suffit d'étudier :

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$$

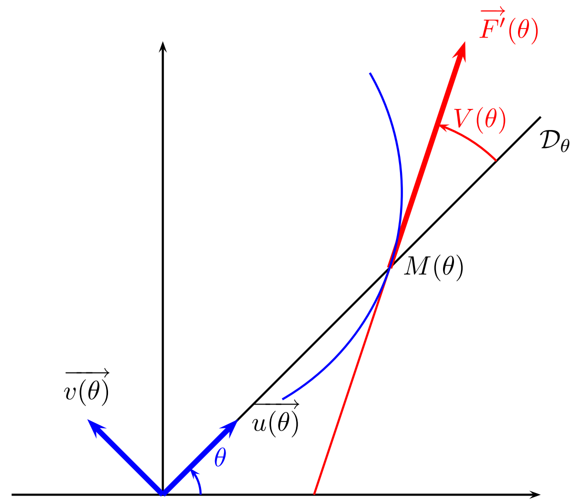

Fig. 7.4 – *L'angle* $V(\theta)$: $\tan V(\theta) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$

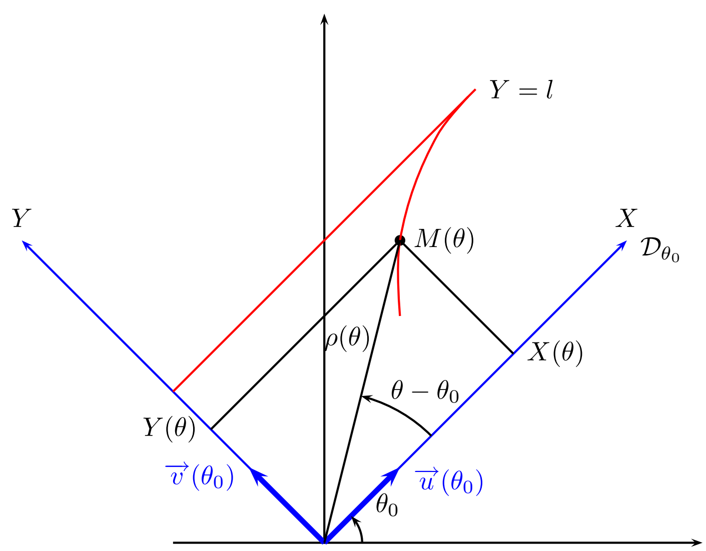

Fig. 7.5 – *Recherche d'asymptote* : $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} l$

- Sinon, on fait l'étude dans le repère polaire $(0, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$:

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

4. Branches infinies spirales :
   - Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} \infty$;
   - Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} R$, on a un cercle ou un point asymptote ;
5. Il est important, avant de commencer l'étude d'une courbe polaire de réduire l'intervalle d'étude. Quelques exemples :
   - Si $\rho(\theta)$ est T périodique, avec $T = \frac{p}{q}2\pi$,
   - Si $\rho(-\theta) = \pm\rho(\theta)$,
   - Si $\rho(\theta_0 - \theta) = \pm\rho(\theta)$.

7.4.2 La cardioïde

C'est la courbe d'équation polaire

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$$

Question 1. Réduire l'intervalle d'étude, et étudier le signe de $\rho(\theta)$.

Question 2. Etudier le passage au pôle.

Question 3. Tracer la courbe en précisant la tangente en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

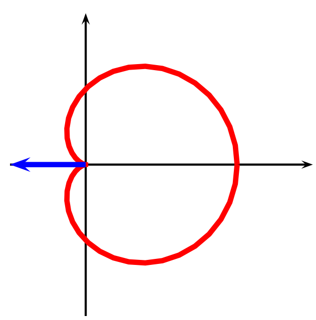

FIG. 7.6 – *Cardioïde*

7.4.3 La strophoïde droite

C'est la courbe polaire d'équation

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

Question 4. Déterminer le domaine de définition de $\rho(\theta)$ et son signe.

Question 5. Faire l'étude du passage au pôle, et des branches infinies.

Question 6. Tracer la courbe.

Remarque 50. Voir les sites web suivants :

`http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml`
`http://perso.wanadoo.fr/jpq/courbes/index.htm`
`http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html`
`http://mathworld.wolfram.com/`

pour les propriétés des courbes classiques avec des animations.

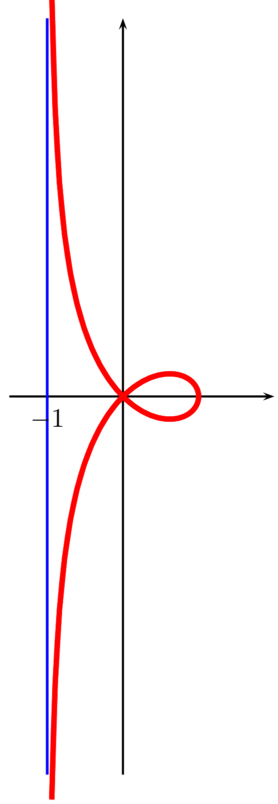

FIG. 7.7 – *Strophoïde droite*

7.5 Coniques

DÉFINITION 7.8 : Coniques
Soit $F \in \mathbb{R}^2$ un point et $\mathcal{D}$ une droite affine. Soit $e > 0$. On appelle *conique* de *foyer* F, de *directrice* $\mathcal{D}$ et d'*excentricité* e, la courbe $\mathcal{C}$ formée des points M du plan vérifiant :

$$d(F,M) = e \times d(M,\mathcal{D})$$

1. Si $0 < e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *ellipse* ;
2. Si $e = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *parabole* ;
3. Si $e > 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *hyperbole* ;

7.5.1 Équation polaire d'une conique

On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel l'équation de la directrice $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{D} : x = \delta > 0$$

Un point M du plan est repéré par ses coordonnées polaires dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{FM} = \rho \overrightarrow{u}$.

THÉORÈME 7.8 : Equation polaire d'une conique

$$M \in \mathcal{C} \iff \boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

où $\boxed{p = e\delta}$ est le *paramètre* de la conique.

7.5.2 Equations cartésiennes réduites

On se place cette fois dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}$ est choisi tel que l'équation de la directrice soit:

$$\mathcal{D} : \quad x = -\delta > 0$$

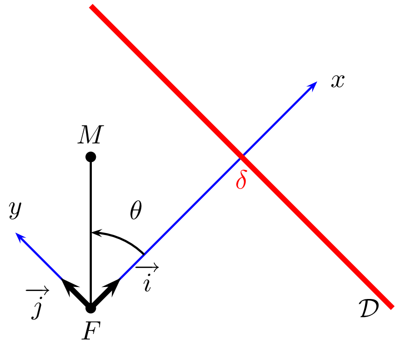

Fig. 7.8 – *Repère pour l'équation polaire d'une conique*

On effectue un changement de repère $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le point O s'appelle le *centre* de la conique. On obtient alors les équations suivantes :

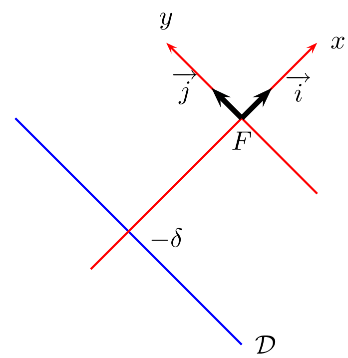

Fig. 7.9 – *Repère pour l'équation cartésienne d'une conique*

1. *Parabole* $e = 1$:

$$\boxed{F\left|\begin{matrix}\frac{p}{2}\\0\end{matrix}\right.}, \quad \boxed{\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}}, \quad \boxed{\mathcal{C} : y^2 = 2px}$$

Paramétrisation : $x(t) = \dfrac{t^2}{2p}$, $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$

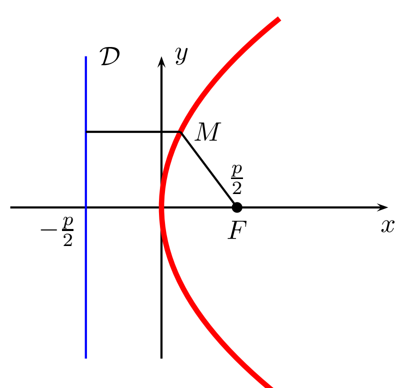

Fig. 7.10 – *Parabole* $y^2 = 2px$

2. *Ellipse*

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}, \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} \quad \boxed{F\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}, F'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}} \quad \boxed{\mathcal{D} : x = -\frac{a^2}{c}, \mathcal{D}' : x = \frac{a^2}{c}} \quad \boxed{\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equation de la tangente en $M_0\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Paramétrisation : $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin(t)$, $t \in [0,2\pi[$.

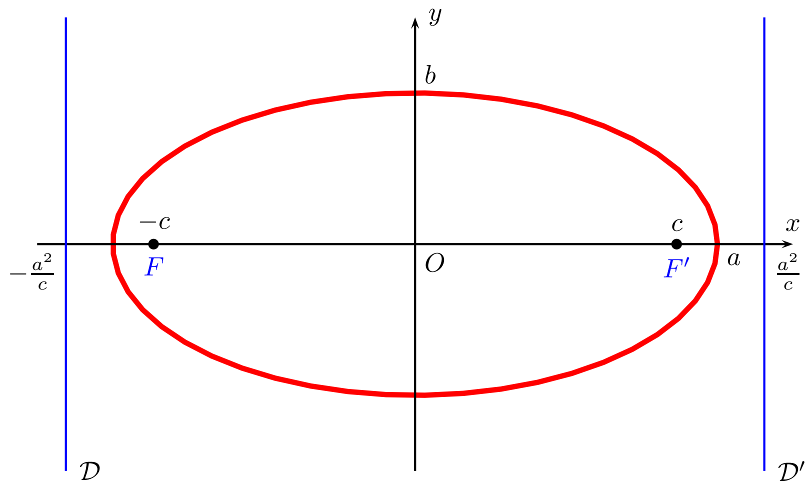

FIG. 7.11 – *Ellipse :* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3. *Hyperbole* $e > 1$:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}, \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} \quad \boxed{F\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}, F'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}} \quad \boxed{\mathcal{D} : x = -\frac{a^2}{c}, \mathcal{D}' : x = \frac{a^2}{c}} \quad \boxed{\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Et les asymptotes ont pour équation :

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x}$$

On dit que l'hyperbole est *équilatère* lorsque les asymptotes sont orthogonales, ie $a = b \iff e = \sqrt{2}$.
Equation de la tangente en un point $M_0\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Paramétrisation d'une branche de l'hyperbole : $x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.

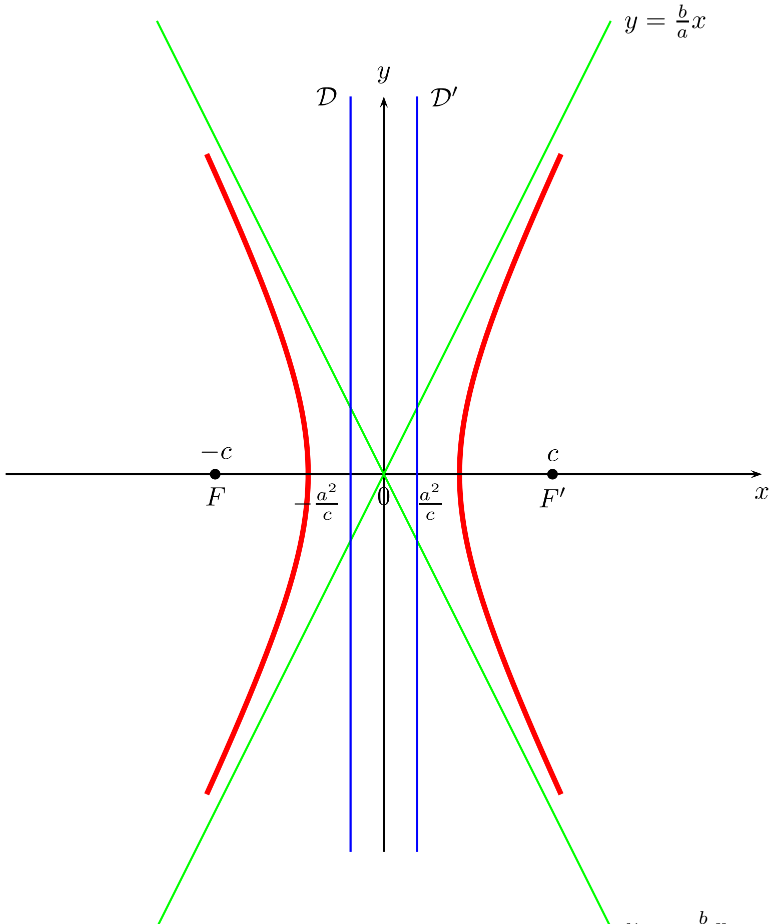

FIG. 7.12 – *Hyperbole* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Exercice 7-5

Soit une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F, F' et un point $M_0 \in \mathcal{E}$ différent des sommets.

a. Soit P l'intersection de la tangente en M_0 avec la directrice. Montrer que les droites (FM_0) et (FP) sont orthogonales.

b. Soit T l'intersection de la tangente en M_0 avec l'axe $(0x)$ et N l'intersection de la normale en M_0 avec l'axe $(0x)$. Montrer que

$$\overrightarrow{OT}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OF}\|^2$$

Exercice 7-6

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F,F' de directrice $\mathcal{D}$ et $M_0 \in \mathcal{H}$.

a) Soit P l'intersection de la tangente en M_0 avec $\mathcal{D}$. Montrer que les droites (FP) et FM_0 sont orthogonales.

b) Soit T l'intersection de la tangente en M_0 avec l'axe focal et N l'intersection de la normale en M_0 avec l'axe focal. Montrer que

$$< \overrightarrow{OT},\overrightarrow{ON} >= \|\overrightarrow{OF}\|^2$$

THÉORÈME 7.9 : **Equations bifocales**

1. Pour une ellipse de foyers F et F' :

$$\boxed{M \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow d(F,M) + d(F',M) = 2a}$$

2. Pour une hyperbole de foyers F et F' :

$$\boxed{M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow |d(F,M) - d(F',M)| = 2a}$$

Exercice 7-7

Soit une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' et un point M de cette ellipse. Montrer que la bissectrice intérieure des droites (FM) et $(F'M)$ est la normale à l'ellipse au point M.

7.5.3 Courbes algébriques du second degré

On considère un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan :

$$\mathcal{C} = \{M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \mid P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + +dx + ey + f = 0\}$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

DÉFINITION 7.9 : **Discriminant**

On appelle *discriminant* de la courbe du second degré

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

le réel $\boxed{\Delta = ac - b^2}$.

LEMME 7.10 : **Élimination des termes linéaires**

On suppose que $\Delta \neq 0$. Il existe un repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $M\left|\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}'}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = F$$

THÉORÈME 7.11 : **Effet d'un changement de repère orthonormé**
On considère dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$$

1. Si l'on effectue un changement de repère orthonormé, $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, l'équation de la courbe devient :
$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = F$$
avec
$$\begin{cases} \Delta' = AC - B^2 = ac - b^2 = \Delta \\ A + C = a + c \end{cases}$$
On remarque que le discriminant est indépendant du repère orthonormé.
2. Il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ soit de la forme
$$AX^2 + CY^2 = F$$
avec
$$\begin{cases} A + C & = a + c \\ AC & = ac - b^2 = \Delta \end{cases}$$

Remarque 51. Les mêmes calculs (avec les termes linéaires) montrent que lorsque $\Delta = 0$, si $\mathcal{C}:\ ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, dans un autre repère orthonormé, l'équation devient $AX^2+2BXY+CY^2+DX+EY+F=0$ avec également $\Delta' = AC - B^2 = 0$.

THÉORÈME 7.12 : **Classification des courbes du second degré**
On considère une courbe du second degré d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans un repère orthonormé. On note $\Delta = ac - b^2$ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
- Si $\Delta < 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.
- Si $\Delta = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.

Remarque 52. Le théorème précédent fournit un algorithme pour déterminer la nature de la courbe

$$\mathcal{C}:\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

et préciser son équation réduite :
1. Calculer le discriminant $\Delta = ac - b^2$ et $T = a + c$. Selon le signe de Δ, on peut sans calcul préciser le type de la courbe.
2. Si $\Delta \neq 0$, par un changement du centre du repère défini par les formules
$$\begin{cases} x & = X + \alpha \\ y & = Y + \beta \end{cases}$$
se débarrasser des termes linéaires en x et y pour aboutir à une équation :
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$$
Le centre du nouveau repère est $\Omega \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$.
3. On sait que l'on peut par rotation des axes se placer dans un repère orthonormé de même centre Ω où l'équation devient
$$Ax^2 + Cy^2 = F$$
4. On connaît la somme et le produit de A et C, et par conséquent, ils sont racines d'un trinôme.
5. Ayant déterminé A et C, on peut écrire l'équation réduite de la conique et discuter de sa nature en fonction du signe de F
6. Si l'on veut avoir toutes les informations, il faut déterminer l'angle θ de rotation choisi pour annuler le terme xy.

Exercice 7-8

On considère les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par les équations

a. $2x^2 + y^2 + 4x + 6y + 1 = 0,$

b. $xy = 4,$

c. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

Déterminer leur nature et préciser leurs éléments caractéristiques.