DS 10 - 26 mars 2014

I f affine avec $f(3)=2$, $f(-4)=6$.

donc $f(x)=mx+p$ avec $m=\dfrac{f(-4)-f(3)}{-4-3}=\dfrac{6-2}{-7}=-\dfrac{4}{7}$

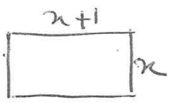
alors $f(x)=-\dfrac{4}{7}x+p$

et $f(3)=2$ donc $-\dfrac{4}{7}\times 3+p=2 \iff p=2+\dfrac{12}{7}$

$$=\dfrac{26}{7}$$

donc $\boxed{f(x)=-\dfrac{4}{7}x+\dfrac{26}{7}}$.

II



① On a $\mathcal{A}(x)=x(x+1)$

$\mathcal{P}(x)=2x+2(x+1)$

$=4x+2$.

donc $\mathcal{A}(x)=\mathcal{P}(x) \iff x(x+1)=4x+2$

$\iff x^2+x-4x-2=0$

$\iff x^2-3x-2=0$ cqfd.

② Pour $x\in\mathbb{R}$ on a $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{17}{4}=x^2-3x+\dfrac{9}{4}-\dfrac{17}{4}$

$=x^2-3x-\dfrac{8}{4}$

$=x^2-3x-2$

et l'égalité est démontrée

③ Finalement $\mathcal{A}(x)=\mathcal{P}(x) \iff x^2-3x-2=0$

$\iff \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{17}{4}=0$

$\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

$\iff x-\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$ ou $x-\frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{17}{4}}$

$\iff x = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2} \simeq -0{,}56 < 0.$

impossible

Il y a donc une unique solution au problème avec $x=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}$

III 1 a) $g(x) < 1 \iff x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

b) $f(x) \geqslant g(x) \iff x \in [-1;0[\cup\{1\}$

c) Le maximum de f est $1{,}2$ atteint pour $x=\frac{1}{2}$.

2 pour $x \in \mathbb{R}$: $g(x)-f(x) = \frac{1}{x}-(-x^2+x+1)$

$$= \frac{1}{x}+x^2-x-1$$

$$= \frac{1+x^3-x^2-x}{x}$$

D'autre part :

$$(x-1)^2(x+1) = (x^2-2x+1)(x+1)$$
$$= x^3-2x^2+x+x^2-2x+1$$
$$= x^3-x^2-x+1$$

et finalement on a donc bien $\boxed{g(x)-f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x}}$.

(b) La position relative de C_g et C_f est donnée par le signe de $d(x) = g(x) - f(x)$

$$d(x) = g(x) - f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x}.$$

Dressons le tableau de signe:

x		-1		0		1	
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$d(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$

ainsi: C_g au dessus de C_f sur $]-\infty; -1] \cup [0, +\infty[$

C_g en dessous de C_f sur $]-1, 0[$ (strictement)

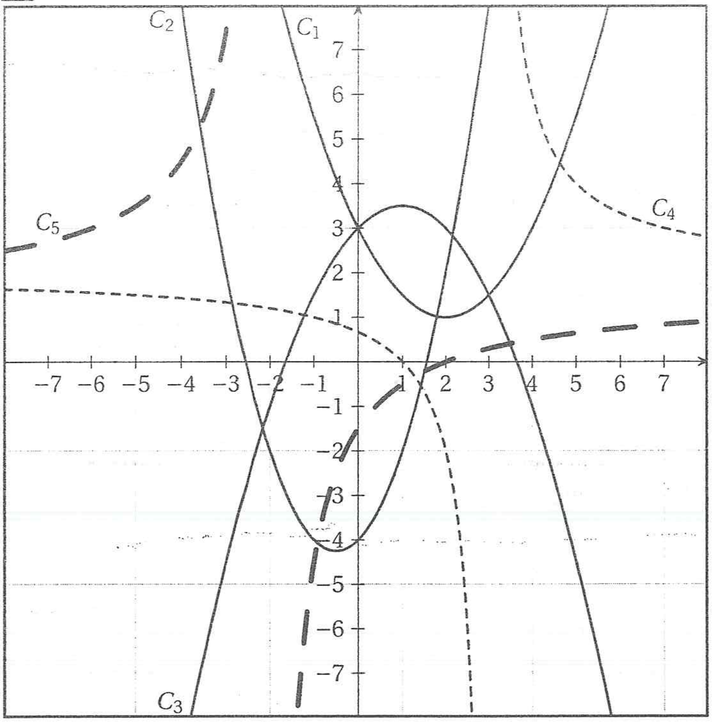
(c) l'abscisse x des points d'intersect° de C_f et C_g satisfait

$f(x) = g(x) \iff g(x) - f(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$ d'après le tableau.

On a deux points d'intersection:

$A(1; g(1))$ et $B(-1, g(-1))$ c'est-à-dire $\boxed{A(1, 1) \text{ et } B(-1, -1)}$.

4 (2 points)



On donne les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{3x-6}{2x+4}$ pour $x \neq 2$.
3. $f_3(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{-2x+2}{3-x}$ pour $x \neq 3$.
5. $f_5(x) = x^2 + x - 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Compléter les phrase suivantes par C_1,C_2,C_3,C_4,C_5

1. La fonction f_1 a pour courbe représentative . C_1
2. La fonction f_2 a pour courbe représentative . C_5
3. La fonction f_3 a pour courbe représentative . C_3
4. La fonction f_4 a pour courbe représentative . C_4
5. La fonction f_5 a pour courbe représentative . C_2

5 **(3 points)** Soit f définie par $f(x) = \left(2 - \dfrac{3}{x}\right)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les variations de f sur $]0; \frac{3}{2}]$ en complétant le tableau d'enchainement des opérations suivants et en justifiant correctement.

0	$<$	a	$\leq$	b	$\leq$	$\frac{3}{2}$	Justifications
		$\dfrac{1}{a}$	$\geqslant$	$\dfrac{1}{b}$	$\geqslant$	$\frac{2}{3}$	Car $x \mapsto 1/x$ ↓ sur $\mathbb{R}_+^*$
		$2-3\dfrac{1}{a}$	$\leqslant$	$2-3\dfrac{1}{b}$	$\leqslant$	0	Car $x \mapsto 2-3x$ ↓ sur $\mathbb{R}$
		$\left(2-3\dfrac{1}{a}\right)^2$	$\geqslant$	$\left(2-3\dfrac{1}{b}\right)^2$	$\geqslant$	0	Car $x \mapsto x^2$ ↓ sur $\mathbb{R}_-$
		$f(a)$	$\geqslant$	$f(b)$	$\geqslant$	0	####################

Conclure : quel est le sens de variation de f.

pour $0 \leq a \leq b \leq \frac{3}{2}$ on a $f(a) \geqslant f(b)$

donc f est décroissante sur $]0; 3/2]$.