

# Chapitre 21

## Calcul de primitives

### 21.1 Calcul pratique de primitives

On note  $\int f(x) dx$  une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ . Cette notation désigne une *fonction*, à ne pas confondre avec une intégrale définie  $\int_a^b f(x) dx$  qui est un *réel*.

**THÉORÈME 21.1 : Changement de variables**

Soit  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\varphi : J \mapsto I$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de l'intervalle  $J$  vers l'intervalle  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors  $F \circ \varphi$  est une primitive de  $(f \circ \varphi) \times \varphi'$  sur l'intervalle  $J$ .

En pratique pour calculer une primitive  $F(x) = \int f(x) dx$ , on pose  $x = \varphi(t)$ ,  $dx = \varphi'(t) dt$ , où  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de l'intervalle  $J$  vers l'intervalle  $I$  et l'on calcule une primitive  $G(t) = F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  sur l'intervalle  $J$ . Ensuite il suffit de remplacer  $t$  par  $\varphi^{-1}(x)$  :  $F(x) = G(\varphi^{-1}(t))$ .

**Exercice 21-1**

Calculer les primitives suivantes :

1.  $\int \frac{dx}{\sin x}$  sur  $I = ]0, \pi[$  ;
2.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$  sur  $I = ]0, +\infty[$  ;
3.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$  sur  $I = \mathbb{R}$  ;
4.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$  sur  $I = \mathbb{R}$  ( $a > 0$ ) ;
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  sur  $I = ]-a, a[$ .

**THÉORÈME 21.2 : Intégration par parties**

(H1) Soient  $u, v : I \mapsto \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $I$ .

Alors

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx + C$$

**Exercice 21-2**

Calculer les primitives suivantes :

1.  $\int x \ln(x^2 + 1) dx$  ;
2.  $\int (x^2 - x + 3)e^{2x} dx$  ;
3.  $\int e^x \sin x dx$  ;
4.  $\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) dx$ .

#### 21.1.1 Primitives usuelles à connaître par coeur

Les classiques

$$\int (x-a)^\alpha dx = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos x}{a} \quad \int \cos(ax) dx = \frac{\sin x}{a} \quad \int \operatorname{sh}(ax) dx = \frac{\operatorname{ch} x}{a} \quad \int \operatorname{ch}(ax) dx = \frac{\operatorname{sh} x}{a} \quad (a \neq 0)$$

### Celles à connaître absolument

Soit un réel  $a > 0$ . On obtient les primitives suivantes en factorisant  $a^2$  et en faisant le changement de variables  $u = x/a$ .

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{argsh} \frac{x}{a}}$$

où  $\operatorname{argsh}$  est la bijection réciproque de la fonction  $\operatorname{sh}$  définie sur  $\mathbb{R}$ , et sa forme logarithmique (bonne à connaître par coeur) s'écrit :

$$\boxed{\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$\left. \begin{array}{l} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotan x \\ \int \tan x dx = -\ln|\cos x| \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x \\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x \\ \int \operatorname{th} x dx = \ln|\operatorname{ch} x| \end{array} \right.$$

### Primitives obtenues par changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \quad \left\| \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| \right.$$

Elle s'obtiennent grâce au changement de variables :

$$\boxed{\begin{array}{l|l} t & = \tan \frac{x}{2} \\ dt & = \frac{1}{2}(1+t^2) dx \\ \sin x & = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x & = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x & = \frac{2t}{1-t^2} \end{array} \quad \left\| \quad \begin{array}{l} t & = \operatorname{th} \frac{x}{2} \\ dt & = \frac{1}{2}(1-t^2) dx \\ \operatorname{sh} x & = \frac{2t}{1-t^2} \\ \operatorname{ch} x & = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \operatorname{th} x & = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right.}$$

On obtient la primitive suivante en remplaçant  $x$  par  $x + \frac{\pi}{2}$ .

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arctan} e^x$$

## 21.2 Fractions rationnelles

### DÉFINITION 21.1 : Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est un « quotient » de deux polynômes  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ . On la note  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ . On note  $\mathbb{K}(X)$  l'ensemble des fractions rationnelles. On peut définir la somme et le produit de deux fractions rationnelles par les formules suivantes :

$$F_1(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}, \quad F_2(X) = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

$$F_1 + F_2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \quad F_1F_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

Muni de ces lois,  $(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un corps commutatif.

*Remarque 224.* Si  $\delta = P \wedge Q$ , alors  $P = P_1\delta$  et  $Q = Q_1\delta$  avec  $P_1 \wedge Q_1 = 1$  et alors  $\frac{P}{Q} = \frac{P_1\delta}{Q_1\delta} = \frac{P_1}{Q_1}$ . On peut également diviser au numérateur et au dénominateur par le coefficient dominant du polynôme  $Q_1$ . Dans la suite, on considérera donc uniquement des fractions rationnelles de la forme  $F = \frac{P}{Q}$  avec  $P \wedge Q = 1$  et  $Q$  un polynôme unitaire.

### DÉFINITION 21.2 : Degré d'une fraction rationnelle

Soit une fraction rationnelle  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On appelle degré de  $F$  :

$$\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z}$$

On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2), \quad \deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$$

Lorsque  $F \neq 0$ , le degré de  $F$  est un entier relatif. Lorsque  $F = 0$ ,  $\deg F = -\infty$ .

### DÉFINITION 21.3 : Zéros, pôles d'une fraction rationnelle, fonctions rationnelles

Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . Les racines de  $P$  s'appellent les *zéros* de  $F$  et les racines de  $Q$  les *pôles* de  $F$ . Si  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des pôles de  $F$ , on peut définir la *fonction rationnelle* associée à  $F$  :

$$\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \end{cases}$$

*Remarque 225.* Un pôle  $a \in \mathbb{K}$  de la fraction  $F = \frac{P}{Q}$ , est dit de multiplicité  $k \in \mathbb{N}$ , lorsque le scalaire  $a$  est un zéro de multiplicité  $k$  du polynôme  $Q$ .

### DÉFINITION 21.4 : Dérivée d'une fraction rationnelle

Soit une fraction rationnelle  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On définit *formellement* la dérivée de cette fraction rationnelle par la formule

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

*Remarque 226.* On associe la *fonction rationnelle* dérivée associée  $\tilde{F}' : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \mapsto \mathbb{K}$ . Cette fonction dérivée coïncide avec la dérivée usuelle de la fonction  $\tilde{F}$  lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

### 21.2.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

#### PROPOSITION 21.3 : Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit une fraction rationnelle  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe un unique couple  $(E, \hat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$  tel que

$$\begin{cases} F = E + \hat{F} \\ \deg \hat{F} < 0 \end{cases}$$

Le polynôme  $E$  est appelé la *partie entière* de la fraction  $F$ .

Remarque 227. Pour trouver la partie entière de  $F$ , on effectue la division euclidienne du polynôme  $A$  par le polynôme  $B$  :  $A = BE + R$  avec  $\deg R < \deg B$  et alors  $F = E + \frac{R}{B}$ .

**PROPOSITION 21.4 : Partie polaire d'une fraction rationnelle**

Soit une fraction rationnelle  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  et un pôle  $a \in \mathbb{K}$  de multiplicité  $k$  :

$$B = (X - a)^k \widehat{B} \text{ avec } \widehat{B}(a) \neq 0$$

Il existe un unique couple  $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$  de polynômes tels que

$$F = \frac{A_1}{\widehat{B}} + \frac{A_2}{(X - a)^k} \text{ et } \deg(A_2) < k$$

La fraction rationnelle  $\frac{A_2}{(X - a)^k}$  est appelée *partie polaire* de la fraction  $F$  relative au pôle  $a$ .

**PROPOSITION 21.5 : Coefficient associé à un pôle simple**

Si une fraction rationnelle  $F = \frac{P}{Q}$  est de degré  $< 0$  avec  $Q(X) = (X - a)V(X)$ , où  $V(a) \neq 0$ , la partie polaire de la fraction  $F$  relativement au pôle simple  $a$  est de la forme  $\frac{\lambda}{X - a}$  :

$$F = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{U}{V} \tag{21.1}$$

Pour trouver le scalaire  $\lambda$ , on peut :

- Multiplier (21.1) par  $(X - a)$ , puis faire  $x = a$  dans la fonction rationnelle associée. On trouve

que :  $\lambda = \frac{P(a)}{V(a)}$ .

- Utiliser la formule de Taylor pour  $Q$ , et obtenir  $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ . Cette formule est très utile lorsqu'il est difficile de trouver le quotient  $V$  du polynôme  $Q$  par  $(X - a)$ .

### 21.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

**THÉORÈME 21.6 : Décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$**

Soit une fraction rationnelle  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ , avec la décomposition du polynôme  $Q$  en éléments irréductibles qui s'écrit :

$$Q = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n}$$

Alors la fraction  $F$  s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$F = E + \left( \frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \left( \frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}} \right)$$

où la partie entière  $E \in \mathbb{C}[X]$  est un polynôme nul, ou de degré  $\deg(P) - \deg(Q)$  et où les coefficients  $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$  sont complexes.

**Exercice 21-3**

Décomposer les fractions rationnelles  $F(X) = \frac{X - 4}{(X - 1)(X + 1)X}$  et  $G(X) = \frac{1}{X^n - 1}$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .

## Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

On suppose que  $F(X) = \frac{P}{Q}$  avec  $\deg F < 0$  et  $Q(X) = (X - a)^n V(X)$  avec  $(V(a) \neq 0)$ . La décomposition de  $F$  s'écrit alors

$$F = \frac{\lambda_1}{(X - a)} + \frac{\lambda_2}{(X - a)^2} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X - a)^n} + \frac{U(X)}{V(X)} \quad (21.2)$$

- En multipliant (21.2) par  $(X - a)^n$  et en faisant  $x = a$ , on trouve  $\lambda_n$ ;
- Si  $n$  est petit, ( $n \leq 2$ ), on retranche  $\frac{\lambda_n}{(X - a)^n}$  à  $F$ , et on recommence pour trouver  $\lambda_{n-1}$  etc;
- Si  $n \geq 3$ , on fait le changement de variables  $Y = X - a$ ,  $F(Y) = \frac{P_1(Y)}{Y^n V_1(Y)}$ , et on effectue une division selon les puissances croissantes (ou un  $DL(0, n - 1)$ ) à l'ordre  $n - 1$ :

$$P_1 = V_1(a_0 + a_1 Y + \dots + a_{n-1} Y^{n-1}) + R \text{ avec } \text{val}(R) \geq n$$

On a alors :

$$F(Y) = \frac{a_0}{Y^n} + \frac{a_1}{Y^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y} + \dots$$

et on trouve les coefficients  $\lambda_1 = a_{n-1}$ ,  $\lambda_2 = a_{n-2}$ , ...

### Exercice 21-4

Décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction rationnelle  $G(X) = \frac{X + 1}{(X - 1)^4 X}$ .

*Remarque 228.* Trois astuces à retenir pour obtenir des relations entre coefficients :

- multiplier par  $x^p$  et faire  $x \rightarrow +\infty$  (ou prendre la partie entière des fractions résultantes);
- Utiliser la parité éventuelle de la fraction;
- Donner une valeur particulière à  $x$  ( $x = 0$ ).

### Exercice 21-5

Décomposer dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction rationnelle  $G(X) = \frac{X}{(X^2 - 1)^2}$ .

## 21.2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

### THÉORÈME 21.7 : Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ , où la décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  du dénominateur s'écrit :

$$Q = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1} \dots (X^2 + b_p X + c_p)^{\beta_p}$$

Alors la fraction  $F$  s'écrit de façon unique :

$$F = E + \left[ \left( \frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \left( \frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}} \right) \right] + \left[ \left( \frac{\mu_{11}X + \delta_{11}}{X^2 + b_1X + c_1} + \frac{\mu_{12}X + \delta_{12}}{(X^2 + b_1X + c_1)^2} + \dots + \frac{\mu_{1\beta_1}X + \delta_{1\beta_1}}{(X^2 + b_1X + c_1)^{\beta_1}} \right) + \dots + \left( \frac{\mu_{p1}X + \delta_{p1}}{X^2 + b_pX + c_p} + \frac{\mu_{p2}X + \delta_{p2}}{(X^2 + b_pX + c_p)^2} + \dots + \frac{\mu_{p\beta_p}X + \delta_{p\beta_p}}{(X^2 + b_pX + c_p)^{\beta_p}} \right) \right]$$

où la partie entière  $E \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme nul ou de degré  $\deg P - \deg Q$ , et tous les  $\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  sont des réels.

Le premier groupe est formé d'éléments simples de première espèce et le second groupe d'éléments simples de seconde espèce.

- La recherche de la partie entière et des coefficients des éléments simples de première espèce se fait comme précédemment;
- On peut utiliser une décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  et regrouper les éléments simples correspondant aux pôles conjugués pour obtenir les éléments simples de seconde espèce;

- Si  $X^2 + pX + q = (X - a)(X - \bar{a})$ , on peut multiplier la décomposition par  $(X^2 + pX + q)^k$  et faire  $x = a$ , puis  $x = \bar{a}$ ;
- Utiliser les remarques précédentes pour trouver des relations entre coefficients.

**Exercice 21-6**

Décomposer dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles  $F(X) = \frac{1}{X^{2n} - 1}$ ,  $G(X) = \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2}$  et  $H(X) = \frac{X}{(X^2 + 1)^2(X - 1)^2}$ .

---

**Exercice 21-7**

Utiliser la décomposition de la fraction  $F(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$  pour trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$


---

**Exercice 21-8**

Soit  $f$  la fonction arctan. Décomposer  $f'(x)$  dans  $\mathbb{C}(X)$ , puis utiliser cette décomposition pour calculer explicitement  $f^{(n)}(x)$ . En déduire les zéros de  $f^{(n)}$ .

---

**Exercice 21-9**

Soit un polynôme  $P$  de degré  $n$  à coefficients réels n'admettant que des racines simples.

- Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $F = \frac{P'}{P}$ .
  - En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}, P''(x)P(x) \leq P'(x)^2$ .
- 

### 21.2.4 Primitives de fractions rationnelles.

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$ . La partie entière et les éléments simples de première espèce se primitivent immédiatement. Pour primitiver un élément simple de deuxième espèce:  $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} dx$ ,

- Faire apparaître en haut la dérivée de  $x^2 + px + q$ , et la partie en  $x$  se primitiver en  $\ln$  ou en une fraction;
- On se ramène à primitiver  $\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}$ . Pour cela, on réduit le trinôme sous forme canonique et on effectue les changements de variables appropriés;
- Pour calculer  $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ , on intègre  $I_{n-1}$  par parties. On obtient une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .

Par exemple, pour calculer  $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ , on intègre par parties  $\arctan x = \int \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

**Exercice 21-10**

Calculer  $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$

---

**Exercice 21-11**

Calculer  $\int \frac{dx}{x^3(x^2 + 1)}$

---

**Exercice 21-12**

Calculer  $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

---

**Exercice 21-13**

Calculer  $\int \frac{dx}{x(x^6 - 1)}$

---

### 21.2.5 Primitives rationnelles en $\sin$ , $\cos$

On s'intéresse aux primitives de la forme  $\int F(\sin x, \cos x) dx$  où  $F$  est une fraction rationnelle dans les deux arguments.

1.  $\int P(\sin x, \cos x) dx$ , où  $P$  est un polynôme dans les deux variables.

On se ramène au calcul de  $\int \sin^p x \cos^q x dx$ .

- Si  $p$  est impair :  $\int \sin^{2k} x \cos^q x \sin x dx$ , faire le changement de variables  $y = \cos x$  ;
- Si  $q$  est impair : faire le changement de variables  $y = \sin x$  ;
- Si  $p$  et  $q$  sont pairs, on linéarise (cf règles de Bioche).

#### Exercice 21-14

Calculer  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ .

---

2. Règles de Bioche pour calculer  $\int F(\sin x, \cos x) dx$ :

On étudie l'élément différentiel  $\omega(x) = F(\sin x, \cos x) dx$ .

- Si  $\omega(x)$  est invariant par la transformation  $x \mapsto -x$ , on pose  $t = \cos x$  ;
- Si  $\omega(x)$  est invariant par la transformation  $x \mapsto \pi - x$ , on pose  $t = \sin x$  ;
- Si  $\omega(x)$  est invariant par la transformation  $x \mapsto \pi + x$ , on pose  $t = \tan x$  ;
- Si aucune transformation de marche, on pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

#### Exercice 21-15

Calculer  $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ ,  $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$ .

---

### 21.2.6 Primitives rationnelles en $\text{sh}$ , $\text{ch}$

On veut calculer des primitives de la forme  $\int F(\text{sh } x, \text{ch } x) dx$  où  $F$  est une fraction rationnelle dans les deux variables. On a l'analogie des règles de Bioche :

On étudie l'élément différentiel  $\omega(x) = F(\text{sh } x, \text{ch } x) dx$  (en remplaçant les fonctions hyperboliques par les fonctions trigonométriques associées).

- Si  $\omega(x)$  est invariant par la transformation  $x \mapsto -x$ , on pose  $t = \text{ch } x$  ;
- Si  $\omega(x)$  est invariant par la transformation  $x \mapsto \pi - x$ , on pose  $t = \text{sh } x$  ;
- Si  $\omega(x)$  est invariant par la transformation  $x \mapsto \pi + x$ , on pose  $t = \text{th } x$  ;
- Si aucune transformation ne marche, on pose  $t = \text{th } \frac{x}{2}$  ou alors  $t = e^x$ .

#### Exercice 21-16

Calculer  $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x \text{sh}^2 x}$ ,  $\int \frac{\text{sh}^3 x}{\text{ch } x(2 + \text{sh}^2 x)} dx$ ,  $\int \text{th}^3 x dx$ ,  $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5 \text{sh } x - 4 \text{ch } x}$

---

### 21.2.7 Primitives avec des racines.

Il y en a de deux sortes qu'on sait traiter ( $F(\lambda, \mu)$  est une fraction rationnelle dans les deux arguments).

-  $\int F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$  Poser  $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

-  $\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  : réduire le trinôme et poser  $y$  un  $\sin$ , un  $\text{ch}$  ou un  $\text{sh}$  pour faire disparaître la racine.

#### Exercice 21-17

Calculer  $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{x}$

---

**Exercice 21-18**

Calculer  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

**Exercice 21-19**

Calculer  $\int \frac{2+x}{1+x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

**Exercice 21-20**

Calculer  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

**Exercice 21-21**

Calculer  $\int \sqrt{x - x^2} dx$

*Remarque 229.* Une astuce qui simplifie considérablement les calculs : pour calculer une primitive de

$$\int \sqrt{x^2 + px + q} dx$$

commencer par réduire le trinôme pour se ramener à calculer

$$F = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

L'idée consiste à faire passer la racine au dénominateur en intégrant par parties, car la primitive suivante est connue :

$$G = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{argsh}(x/a)$$

**Exercice 21-22**

Calculer  $\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx$ .