Chapitre 25

Applications affines

25.1 Points-vecteurs

Dans ce chapitre, on considère les espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$. Les éléments de E seront appelés indifféremment points *ou* vecteurs*.*

- A deux points $A,B \in E$, on fait correspondre un vecteur noté $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- A un point A et un vecteur $\overrightarrow{x}$, on fait correspondre le point noté $A + \overrightarrow{x}$.

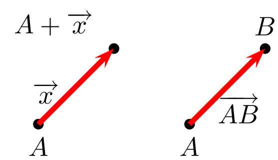


FIG. 25.1 – *Points-vecteurs*

On a alors les propriétés suivantes :
1. $\forall M \in E, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E, M + (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (M + \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{y}$;
2. $\forall (M,P) \in E^2, \exists ! \overrightarrow{x} \in E$, tq $P = M + \overrightarrow{x}$, $(\overrightarrow{x} = P - M)$;
3. $\forall (M,P) \in E^2, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, M + \overrightarrow{x} = M + \overrightarrow{y} \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ $M + \overrightarrow{x} = P + \overrightarrow{x} \Rightarrow M = P$;
4. Relation de Chasles : $\forall (A,B,C) \in E^3, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

25.2 Sous espaces affines

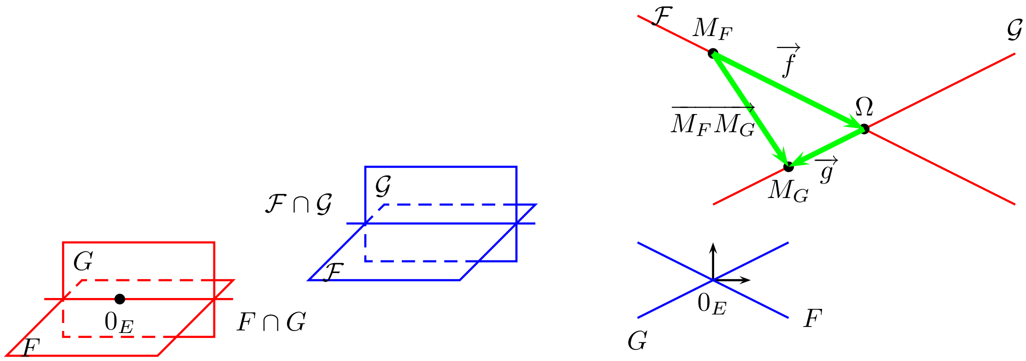
DÉFINITION 25.1 : **Sous-espace affine**
On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* de E si il existe un point M_F de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{M_F + \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{f} \in F\}$$

On note alors $\mathcal{F} = M_F + F$. On dit que :
- le sev F est la *direction* du sous-espace affine $\mathcal{F}$;
- la dimension de F est la *dimension* du sous-espace affine $\mathcal{F}$;
- une base de F sera appelée ensemble de vecteurs directeurs de $\mathcal{F}$.

LEMME 25.1 :
Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors pour tout point $M \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = M + F$.

DÉFINITION 25.2 : **Sous-espaces affines parallèles**
On dit que le sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction G est *parallèle* au sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F lorsque $G \subset F$.



(a) Sous-espaces affines parallèles

(b) Sous-espaces affines supplémentaires dans le plan

FIG. 25.2 – *Intersection de sous-espaces affines*

Remarque 273. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

THÉORÈME 25.2 : **Intersection de sous-espaces affines**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F et G. Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

PROPOSITION 25.3 : **Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires**
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions F et G, avec

$$E = F \oplus G$$

Alors leur intersection est un singleton : $\exists \Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\Omega\}$.

25.3 Barycentres

THÉORÈME 25.4 : **Fonction de Leibniz**
On considère un système de points de E $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, et n réels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On forme le *système de points pondérés* :

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On appelle *poids du système pondéré*, le réel $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. On considère alors la fonction vectorielle :

$$\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ G & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \end{array} \right.$$

- Si $\alpha = 0$, la fonction $\overrightarrow{F}$ est constante ;
- Si $\alpha \neq 0$, il existe un unique point $G \in E$ tel que $\overrightarrow{F}(G) = 0$. Cet unique point s'appelle le *barycentre* du système pondéré de points S. Pour un point $\Omega \in E$ quelconque, on a

$$G = \Omega + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}$$

Théorème 25.5 : Associativité des barycentres
Soit

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

un système pondéré de points de barycentre G. On suppose que

$$\beta_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_p \neq 0 \text{ et } \beta_2 = \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n \neq 0$$

Si G_1 est le barycentre de $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$ et si G_2 est le barycentre de $\begin{pmatrix} A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, alors G est le barycentre de $\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

Remarque 274. On appelle *isobarycentre* des points $(A_1, \dots ,A_n)$, le barycentre du système pondéré

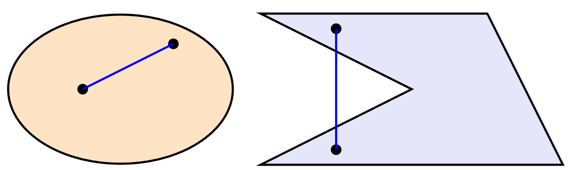
$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Définition 25.3 : Segment
On note $[A,B]$ (segment AB) l'ensemble des barycentres :

$$[A,B] = \{\text{Bar} \begin{pmatrix} A & B \\ t & (1-t) \end{pmatrix} \ ; \ t \in [0,1]\}$$

On définit le *milieu* d'un segment $[A,B]$ comme étant l'isobarycentre $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$ des points A et B.

Définition 25.4 : Partie convexe
Soit une partie $\mathcal{C}$ de l'espace E. On dit que cette partie est *convexe* si et seulement si $\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2$, $[A,B] \subset \mathcal{C}$.



(a) Partie convexe (b) Partie non convexe

Fig. 25.3 – *Parties convexes*

25.4 Applications affines

On considère une application $f : E \mapsto E$, et on veut qu'elle conserve le parallélisme ainsi que les barycentres, c'est à dire que :

1. Si (A,C,A',C') sont quatre points tels que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles, on veut que les droites $\big(f(A)f(C)\big)$ et $\big(f(A')f(C')\big)$ soient parallèles ;
2. Pour tout système pondéré $\begin{pmatrix} A & C \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, de barycentre B, on veut que le barycentre du système $\begin{pmatrix} f(A) & f(C) \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ soit le point $f(B)$.

On montre qu'une telle application doit être de la forme suivante :

Définition 25.5 : Application affine
Si E et E' sont deux espaces vectoriels, $f : E \to E'$ est une application affine si et seulement si $\exists L_f \in \mathcal{L}(E,E')$ telle que

$$\forall (A, \overrightarrow{x}) \in E^2, \quad f(A + \overrightarrow{x}) = f(A) + L_f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

L'application linéaire L_f est appelée *application linéaire associée* à l'application affine f. Elle est unique. L'ensemble des applications affines est noté $\mathcal{A}(E,E')$, et $\mathcal{A}\left(E\right)$ lorsque $E = E'$.

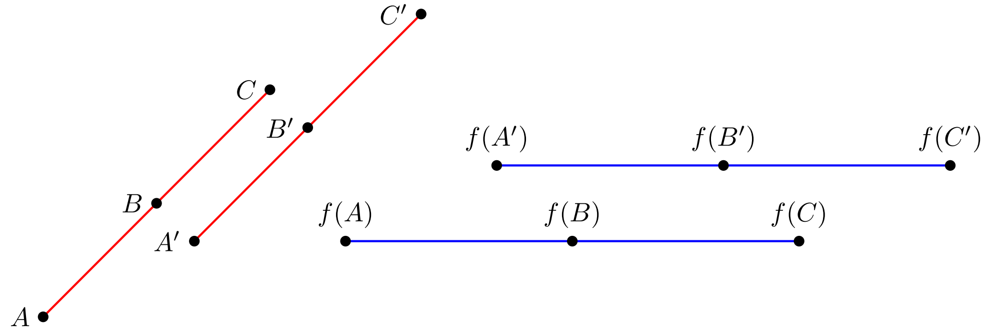


FIG. 25.4 – *Une application affine conserve le parallélisme et les barycentres*

Remarque 275.
1. Si f est une application affine, alors
$$\forall (A,B) \in E, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB})$$
2. Si f est une application affine, l'application linéaire associée est définie de la façon suivante :
$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \quad L_f(\overrightarrow{x}) = f(x) - f(0)$$

THÉORÈME 25.6 : Une application affine conserve le parallélisme

Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine.
1. Si $\mathcal{F} = M_F + F$ est un sous-espace affine de E, alors $f(\mathcal{F}) = f(M_F) + L_f(F)$: c'est un sous-espace affine de E'.
2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de E, $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G} \Rightarrow f(\mathcal{F}) \parallel f(\mathcal{G})$.

THÉORÈME 25.7 : Une application affine conserve les barycentres

Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine. Soit $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ un système pondéré de points de E de poids non-nul. Si G est le barycentre du système pondéré S, alors le point $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $S' = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 25.8 : Expression matricielle d'une application affine.

Soient deux espaces vectoriels réels E et E'. Soit $\mathcal{R} = (\Omega,b)$ un repère cartésien de E et $\mathcal{R}' = (\Omega',b')$ un repère cartésien de E', et $f : E \mapsto E'$ une application affine de partie linéaire L_f. Si X est la matrice des coordonnées d'un point A dans le repère $\mathcal{R}$ et X' la matrice des coordonnées du point $f(A)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, si L est la matrice de l'application linéaire L_f dans les deux bases b et b' et si T est la matrice des coordonnées du point $f(\Omega)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, alors :
$$X' = Z + LX$$

Remarque 276. Dans $\mathbb{R}^2$, si $M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ et $f(M) \left| \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right.$, les formules d'une application affine sont de la forme :
$$\begin{cases} X &= \alpha + ax + by \\ Y &= \beta + cx + dy \end{cases}$$

THÉORÈME 25.9 : Caractérisation des isomorphismes affines par leur partie linéaire

1. Si $f : E \mapsto E'$ et $g : E' \mapsto E''$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $L_g \circ L_f$;
2. (f est bijective) $\Longleftrightarrow$ (L_f est un isomorphisme) ;
3. Si $f : E \mapsto E'$ est une application affine bijective, alors f^{-1} est une application affine de partie linéaire $L_{f^{-1}} = (L_f)^{-1}$.

DÉFINITION 25.6 : Isomorphisme affine, automorphisme affine

1. Si une application affine $f \in \mathcal{A}(E,E')$ est bijective, on dit que c'est un isomorphisme affine.
2. Si $E = E'$, on parlera d'automorphisme affine, l'ensemble des automorphismes affines est un groupe noté $(\mathcal{GA}(E), \circ)$, appelé *groupe affine* de E.

Définition 25.7 : Translations
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de E on définit la translation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$: c'est l'application

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & M + \overrightarrow{u} \end{array} \right.$$

Une translation est une application affine de partie linéaire id_E.

Théorème 25.10 : Groupe des translations

1. Une application affine de E vers E est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité.
2. L'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des translations est un sous-groupe du groupe affine $(\mathcal{GA}(E), \circ)$.
3. $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

Définition 25.8 : Homothétie
On dit qu'une application affine est une homothétie affine si et seulement sa partie linéaire est égale à $\alpha\,\mathrm{id}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Théorème 25.11 : Groupe des homothéties-translations

1. Une homothétie affine possède un unique point fixe $\Omega \in E$ (centre de l'homothétie) et

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\Omega f(M)} = \alpha \overrightarrow{\Omega M}$$

2. L'ensemble des homothéties-translations $\mathcal{HT}(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $(\mathcal{GA}(E), \circ)$.

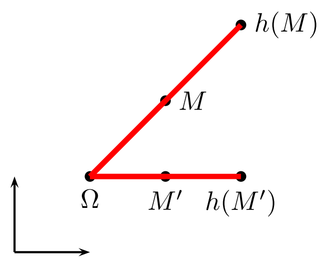


Fig. 25.5 – *Homothétie affine*

Exercice 25-1
Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport $\alpha \neq 0,1$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{x}$. Déterminer la nature des applications $t \circ h$ et $h \circ t$.

Lemme 25.12 : Points fixes d'une application affine
Soit une application affine $f : E \mapsto E$. On note

$$\mathrm{Fix}(f) = \{M \in E \mid f(M) = M\}$$

l'ensemble des points fixes de f. Alors lorsque $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(L_f - \mathrm{id})$.

Théorème 25.13 : Factorisation d'une application affine
Soit une application affine $f : E \mapsto E$, et un point $\Omega \in E$. Alors il existe une translation t et une application affine g tels que $f = t \circ g$, avec Ω qui est un point fixe de l'application affine g : $g(\Omega) = \Omega$.

25.5 Isométries affines

On considère un espace euclidien, muni d'un produit scalaire noté $(.\mid.)$ et de la norme euclidienne associée notée $\|.\|$. Étant donnés deux points $(A,B) \in E^2$, on définit la *distance* entre ces points par :

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Définition 25.9 : **Isométrie affine**
Soit $f : E \mapsto E$ une application. On dit que c'est une *isométrie affine* lorsqu'elle conserve les distances :

$$\forall (A,B) \in E^2, \quad d\big(f(A),f(B)\big) = d(A,B)$$

Théorème 25.14 : **Caractérisation des isométries**
Une application f est une isométrie si et seulement si f est affine et sa partie linéaire L_f est un endomorphisme orthogonal.

Définition 25.10 : **Réflexion**
On appelle *réflexion* une symétrie affine orthogonale par rapport à un hyperplan affine (droite dans le plan, plan dans l'espace). C'est une isométrie affine

Remarque 277. Etant donnés deux points A,B; il existe une unique réflexion s telle que $s(A) = B$ et $s(B) = A$.

Exercice 25-2

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Écrire l'expression analytique de la réflexion échangeant les points $A\left|\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$.

Exercice 25-3

Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan

$$\mathcal{P} : x + y - z = 1$$

Définition 25.11 : **Déplacement**
On dit qu'une isométrie affine est un *déplacement* lorsque sa partie linéaire est une isométrie vectorielle directe : $L_f \in SO(E)$.

Théorème 25.15 : **Classification des déplacements du plan**
Soit $f : E_2 \mapsto E_2$ un déplacement, alors

1. Si $L_f = \mathrm{id}$, f est une translation ;
2. Si $L_f \neq \mathrm{id}$, L_f est une rotation vectorielle r_θ et f est une rotation affine qui possède un unique point fixe Ω. Alors

$$\forall M \in E_2, \quad f(M) = \Omega + r_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$$

On dit que f est la *rotation affine* de centre Ω et d'angle θ.

Théorème 25.16 : **Classification des déplacements de l'espace**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un déplacement de l'espace E_3. On note $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points invariants par f :

$$\mathrm{Fix}(f) = \{M \in E_3 \mid f(M) = M\}$$

1. $L_f = \mathrm{id}$: f est une translation ;
2. $L_f \neq \mathrm{id}$, alors L_f est une rotation vectorielle d'axe $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$ et d'angle θ ;
   (a) Si $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ alors $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite affine $\mathcal{D}$ de direction la droite vectorielle D. On dit que f est une rotation affine d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ,
   (b) Si $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, alors f est la composée d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ (droite de direction D) et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in D$. On dit que f est un *vissage* d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

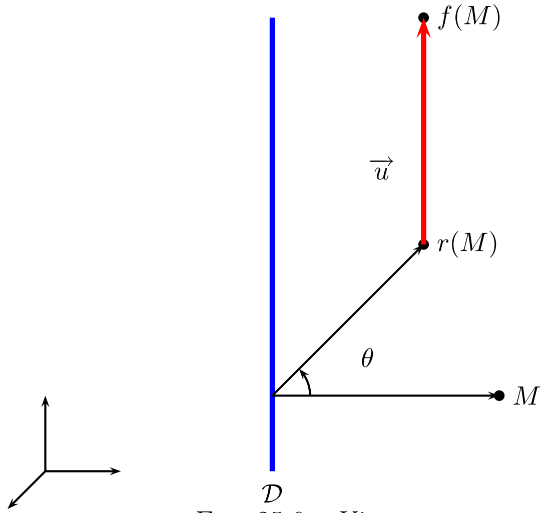


FIG. 25.6 – *Vissage*

Remarque 278. On détermine l'axe $\mathcal{D}$ d'un vissage f par la condition :

$$\mathcal{D} = \{M \in E \mid \overrightarrow{Mf(M)} \in D\}$$

Exercice 25-4

Reconnaître l'application affine donnée par

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z+1 \\ -x \\ y-2 \end{vmatrix}$$

25.6 Similitudes

DÉFINITION 25.12 : **Similitude**
On appelle *similitude* une application $f : E \mapsto E$ telle que $\forall (A,B) \in E^2$, $d(f(A),f(B)) = kd(A,B)$ où $k \in \mathbb{R}^\star$. Le réel k s'appelle le *rapport* de la similitude.

Remarque 279. Une homothétie affine est une similitude, une isométrie affine est une similitude de rapport 1.

Remarque 280. On montre que f est une similitude de rapport k si et seulement si f est une application affine de partie linéaire L_f vérifiant :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \ \|L_f(\overrightarrow{x})\| = k\|\overrightarrow{x}\|$$

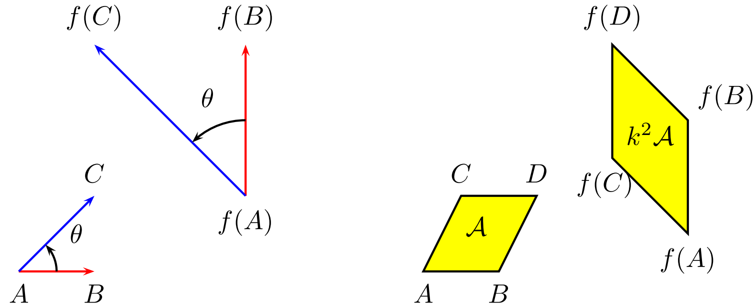
c'est à dire que $L_f = ku$ avec $u \in \mathrm{O}(E)$.

PROPOSITION 25.17 : **Groupe des similitudes**
L'ensemble des similitudes forme un sous-groupe du groupe affine.

DÉFINITION 25.13 : **Similitude directe**
On dit qu'une similitude f est directe (resp. indirecte) si $\det(L_f) > 0$ (resp. $\det(L_f) < 0$). L'ensemble des similitudes directes forme un sous-groupe du groupe des similitudes.

THÉORÈME 25.18 : **Propriétés des similitudes directes**
Soit une similitude directe du plan $\mathcal{E}_2$. Alors :

1. f conserve les angles orientés : Pour trois points (A,B,C) de $\mathcal{E}_2$ avec $A \neq B$, $A \neq C$, l'angle $\measuredangle\big(\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(A)f(C)}\big) = \measuredangle\big(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\big)$.
2. f multiplie les aires par k^2 : Si $(ABCD)$ est un parallélogramme, $\mathcal{A}(f(A)f(B)f(C)f(D)) = k^2\mathcal{A}(ABCD)$.



(a) Conservation des angles

(b) Multiplication des aires par k^2

FIG. 25.7 – *Similitudes directes*

THÉORÈME 25.19 : **Classification des similitudes directes du plan**
Soit une similitude directe du plan $\mathcal{E}_2$ de rapport k.

1. Si $k = 1$, alors f est une isométrie affine (translation ou rotation).
2. Si $k \neq 1$, f possède un unique point fixe Ω et il existe une rotation affine $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω, d'angle θ et une homothétie affine de centre Ω et de rapport k telles que

$$f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}$$

PROPOSITION 25.20 : **Représentation complexe d'une similitude directe**
En identifiant le plan avec $\mathbb{C}$, une similitude directe de rapport k et d'angle θ correspond à une application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{array} \right.$$

où $a = ke^{i\theta}$ et $b \in \mathbb{C}$.

COROLLAIRE 25.21 :
Étant donnés deux segments du plan, $[A,B]$ et $[C,D]$, il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.