Chapitre 1

Raisonnement, ensembles

1.1 Logique.

Une *proposition* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
En mathématiques, on part d'un petit nombre de propositions que l'on suppose vraies (les *axiomes*) et l'on essaie d'étendre le nombre d'énoncés vrais au moyen de *démonstrations*. Pour cela on utilise des règles de logique.
À partir de deux propositions quelconques A et B, on en fabrique de nouvelles dont on définit la valeur logique en fonction des valeurs logiques de A et de B. Une « table de vérité » résume cela :

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

L'évaluation des nouvelles propositions en fonction de la valeur des anciennes paraît naturelle sauf pour l'implication. En effet, si la proposition A vaut F, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition B, la proposition $A \Rightarrow B$ sera évaluée à V. On utilise en mathématiques l'implication pour obtenir de nouveaux résultats. Si l'on sait qu'un résultat A est vrai et si l'on montre que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors d'après la table de vérité, on en déduit que la proposition B est vraie, ce qui étend les résultats mathématiques.
Pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vrai, on peut utiliser l'un des deux raisonnements suivants :

Raisonnement direct : Supposons A vrai, et montrons qu'alors B est vrai ;
Raisonnement par contraposée : Supposons B faux et montrons que A est faux.

`Exemple 1.` On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions :
- A : Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$;
- B : $x = 0$.

Montrer que $A \Rightarrow B$.

Pour montrer une équivalence $A \iff B$, on procède en deux temps :
1. On montre que $A \Rightarrow B$ est vrai ;
2. On montre que $B \Rightarrow A$ est vrai.

`Exemple 2.` On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et les deux propositions
- A : f est une fonction paire et impaire ;
- B : f est la fonction nulle.

Montrer que $A \iff B$.
Remarque 1. Pour montrer l'équivalence de trois propositions $A \iff B \iff C$, il suffit de montrer trois implications convenablement choisies, par exemple $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$.

Raisonnement par l'absurde.
On suppose qu'une proposition B est fausse. Si on aboutit à une contradiction avec une proposition A que l'on sait être vraie, alors on a montré que B est vraie.

`Exemple 3.` Montrer que le réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

1.2 Ensembles

Sans rentrer dans les détails, un ensemble est une « collection » d'objets appelés *éléments*. On note $\boxed{x \in E}$ si l'objet x est un élément de E.
Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x d'un ensemble E. On note :
- $\forall x \in E,\ P(x)$ lorsque la propriété est vraie *pour tous* les éléments x ;
- $\exists x \in E,\ P(x)$ lorsqu'*il existe* au moins un élément x de l'ensemble E pour lequel la propriété est vraie ;
- $\exists! x \in E,\ P(x)$ lorsqu'*il existe un unique* élément de l'ensemble E pour lequel la propriété est vraie.

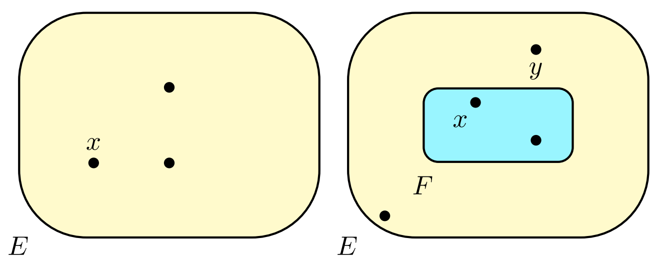
Il faut savoir nier une proposition dépendant de quantificateurs :

Exercice 1-1

Quelle est la négation des propositions suivantes :
1. $\forall x \in E,\ P(x)$;
2. $\exists x \in E,\ P(x)$;
3. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,y)$;
4. $\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)$;
5. $\exists r \in \mathbb{R},\ \exists s \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq r$ et $s \leq r$.

Remarque 2. Nous utiliserons beaucoup les mots « soit » et « posons » dans nos démonstrations cette année.
- Pour montrer une proposition de la forme : $\forall x \in E, \quad P(x)$ (*quel que soit* x dans E, x vérifie une propriété) on commence la démonstration par : « Soit $x \in E$ ». Imaginez qu'une personne extérieure mette en doute votre résultat. Elle vous donne un élément x *de son choix*. Vous n'avez pas le droit de choisir vous même cet élément, et vous devez montrer que cet élément vérifie bien la propriété.
- Pour montrer une proposition de la forme : $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ (il existe un objet x vérifiant la propriété $P(x)$), il vous suffit *d'exhiber* un élément x vérifiant cette propriété. La démonstration contiendra alors la phrase : « Posons $x = \ldots$ Vérifions que x convient $\ldots$ »
- Pour montrer qu'une proposition de la forme : $\forall x \in E, P(x)$ est fausse (c'est à dire que $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ est faux), il suffit d'exhiber un *contre-exemple* : « Posons $x = \ldots$ ». Pour cet élément x, $P(x)$ est fausse.

Si E et F sont deux ensembles, on note $\boxed{E \subset F}$ lorsque tous les éléments de E sont des éléments de F : $\forall x \in E$, $x \in F$.



(a) $x \in E$ (b) $F \subset E$

FIG. 1.1 – *Notations ensemblistes*

Un ensemble particulier est l'*ensemble vide* noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément, et pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$.

`Exemple 4.` Soit l'ensemble $E = \{\{\emptyset\},1,\mathbb{N},\{0,1,2\}\}$. Mettre le signe $\in$ ou $\notin$ et $\subset$ ou $\not\subset$ correct entre les objets suivants :
- $\emptyset \ldots E$;
- $\{\emptyset\} \ldots E$;
- $\mathbb{N} \ldots E$;
- $\{\emptyset,\mathbb{N}\} \ldots E$.

Pour montrer que $E \subset F$, on utilise le plan suivant : Soit $x \in E$. $\ldots$ $x \in F$.

Définition 1.1 : **Egalité de deux ensembles**
On note $E = F$ ssi

$$E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Pour montrer que $E = F$, on utilise le plan suivant :

1. Montrons que $E \subset F$: ... ;
2. Montrons que $F \subset E$: ... .

Définition 1.2 : **Intersection, union, complémentaire**
Soient E et F deux ensembles. On définit de nouveaux ensembles :

- **Intersection** $E \cap F$: $x \in E \cap F$ lorsque $x \in E$ *et* $x \in F$;
- **Union** $E \cup F$: $x \in E \cup F$ lorsque $x \in E$ *ou* $x \in F$;
- **Complémentaire** $E \setminus F$: $x \in E \setminus F$ lorsque $x \in E$ *et* $x \notin F$.

Exercice 1-2

On considère trois ensembles A,B,C. Montrer que

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$$

Exercice 1-3

On considère trois ensembles A,B,C. Comparer les ensembles :

1. $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Définition 1.3 : **ensemble des parties de E**
Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

`Exemple 5.` Si $E = \{a,b,c\}$, $\mathcal{P}(E) = \big\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\big\}$

Exercice 1-4

Écrire l'ensemble $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ lorsque $E = \{a,b\}$.

Définition 1.4 : **Produit cartésien**
Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des « couples » (x,y) avec $x \in E$ et $y \in F$. L'ensemble $E \times F$ s'appelle le *produit cartésien* des ensembles E et F.
On définit de même pour n ensembles $E_1,\dots,E_n$, l'ensemble $E_1 \times \dots \times E_n$ formé des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ avec $x_1 \in E_1,\dots,x_n \in E_n$.

Remarque 3. Ne pas confondre un couple de deux éléments (x,y) avec la paire $\{x,y\}$.

Remarque 4. Soit E un ensemble de référence, et $\mathcal{P}(x)$ une propriété qui dépend de l'élément $x \in E$. On peut définir l'ensemble des éléments de l'ensemble E pour lesquels la propriété est vraie :

$$F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vrai } \}$$

Il est nécessaire d'utiliser un ensemble de référence E sous peine d'aboutir à des paradoxes.

1.3 Applications

DÉFINITION 1.5 : **Définition d'une application**
Soient E et F deux ensembles. Soit $G \subset E \times F$ un sous-ensemble de couples vérifiant :

$$\forall x \in E \ ; \exists! y \in F \text{ tel que } (x,y) \in G$$

A chaque élément de x, on fait alors correspondre l'unique élément y noté $f(x)$ de l'ensemble F tel que $(x,y) \in G$. On dit que G est un *graphe fonctionnel.*

$$\underset{x}{E} \xrightarrow{f} \underset{y=f(x)}{F}$$

La donnée (E,F,G) (ensemble de départ, d'arrivée et graphe fonctionnel) s'appelle une *application* de l'ensemble E vers l'ensemble F notée plus simplement :

$$f : E \mapsto F \text{ ou } E \xrightarrow{f} F$$

Remarque 5.

- Fonction et application sont synonymes.
- On notera $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F. (On trouve également la notation F^E).

DÉFINITION 1.6 : **Égalité de deux applications**
Soient $f : E \mapsto F$ et $f' : E' \mapsto F'$ deux applications. On dit que qu'elles sont égales et l'on note $f = f'$ lorsque elles ont même ensemble de départ : $E = E'$, même ensemble d'arrivée : $F = F'$ et lorsque

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

Pour montrer que $f = g$, on utilise le plan suivant :
Soit $x \in E$.
...
$f(x) = g(x)$

DÉFINITION 1.7 : **Identité**
Soit E un ensemble. On appelle *identité* de E l'application

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

DÉFINITION 1.8 : **Restriction et prolongement d'une fonction**
Soit $f : E \mapsto F$ une application.

- Soit un sous-ensemble $E' \subset E$. On définit *la* restriction de l'application f au sous-ensemble E' comme étant l'application

$$f_{|E'} : \begin{cases} E' & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

- Si $E \subset E'$, une application $\widetilde{f} : E' \mapsto F$ est *un* prolongement de l'application $f : E \mapsto F$ si et seulement si $\widetilde{f}_{|E} = f$, c'est à dire que $\forall x \in E$, $f(x) = \widetilde{f}(x)$.

DÉFINITION 1.9 : **Composée d'applications**
Soit deux applications $f : E \mapsto F$, $g : F \mapsto G$, on définit l'application *composée* notée $h = g \circ f : E \mapsto G$ par la correspondance :

$$\forall x \in E, \ h(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$\underset{x}{E} \xrightarrow{f} \underset{f(x)}{F} \xrightarrow{g} \underset{g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)}{G}$$

Remarque 6. Lorsqu'il s'agit de composer des applications, il est bon d'utiliser des schémas d'applications pour vérifier la validité des composées.

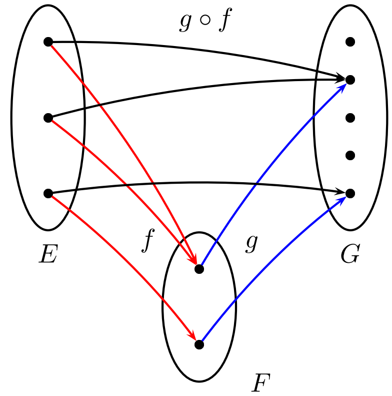


FIG. 1.2 – *Composée de deux applications*

THÉORÈME 1.1 : « **Associativité** » **de la composition**

1. Pour trois applications
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$
on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. Si $f : E \mapsto F$, on a
$$f \circ \mathrm{id}_E = f \text{ et } \mathrm{id}_F \circ f = f$$

DÉFINITION 1.10 : Applications injectives, surjectives, bijectives
Soit $f : E \mapsto F$ une application. On dit que
- f est *injective* ssi $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- f est *surjective* ssi $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- f est *bijective* ssi f est injective et surjective.

Pour montrer que f est injective :
Soit $x \in E$ et $y \in E$. Supposons que $f(x) = f(y)$.
...
Alors $x = y$.

Pour montrer que f est surjective :
Soit $y \in F$.
Posons $x = \dots$,
On a bien $y = f(x)$.

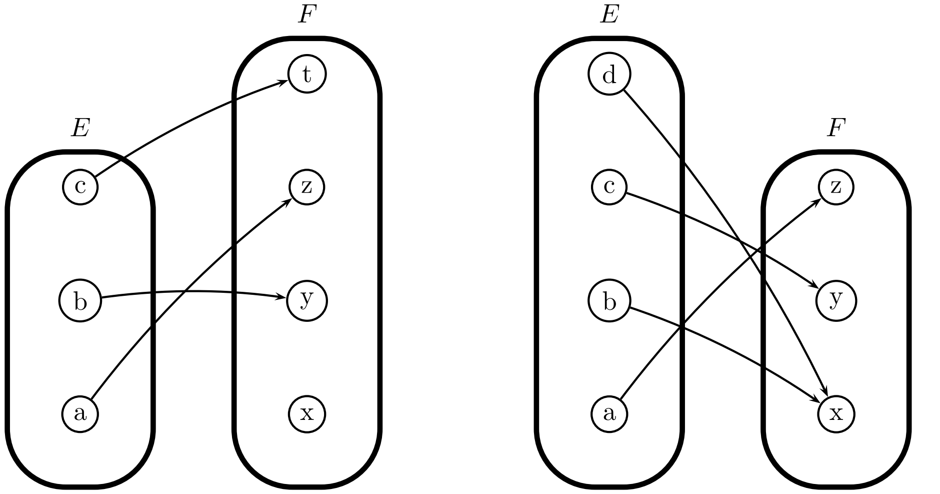
Pour montrer que f est bijective :

1. Montrons que f est injective ;
2. Montrons que f est surjective.

Remarque 7.
- Dire que f est injective revient à dire (par contraposée) que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$$
Deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont deux images distinctes.
- Dire que f est surjective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.
- Dire que f est bijective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \text{ tq } y = f(x)$$

Exercice 1-5

Les applications de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ suivantes sont-elles injectives, surjectives ?
$$x \to x^2 \quad x \to x^3 \quad x \to \sin x$$



f injective, non surjective $\qquad$ f non injective, surjective

FIG. 1.3 – *Injection, surjection*

Exercice 1-6

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x+2y) \end{cases}$. Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 1-7

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers pairs. Montrer que l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ n & \longmapsto & 2n \end{cases}$$

est une bijection. (Il y a donc « autant » d'entiers que d'entiers pairs !)

THÉORÈME 1.2 : **Propriétés des composées**
Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

THÉORÈME 1.3 : **Bijection réciproque**
Soit $f : E \mapsto F$ une application.

$$\underbrace{\big(f \text{bijective}\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\Big(\exists ! g \in \mathcal{F}(F,E) \ \text{ tq } \begin{cases} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{cases}\Big)}_{(ii)}$$

Lorsque f est bijective, on note note l'application g du théorème $g = f^{-1}$. C'est la *bijection réciproque* de l'application f.

$$E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$$

Remarque 8. N'introduire l'application f^{-1} que lorsqu'elle existe, c'est à dire lorsque l'application f est bijective !

Exercice 1-8

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \end{cases}$. Étudier l'injectivité et la surjectivité des

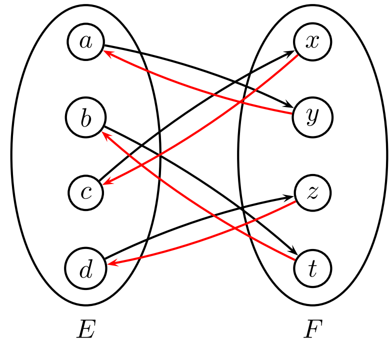


FIG. 1.4 – *Application bijective et bijection réciproque : $y = \phi(a)$, $a = \phi^{-1}(y)$*

applications f et g. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclusion ?

Exercice 1-9

Soit E un ensemble et $f : E \mapsto E$ une application vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que :

1. f injective $\Rightarrow f = \mathrm{id}_E$;
2. f surjective $\Rightarrow f = \mathrm{id}_E$.

THÉORÈME 1.4 : **bijection réciproque d'une composée**

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors l'application $g \circ f$ est bijective et

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Exercice 1-10

Soient deux applications $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto E$. On suppose que l'application $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et que l'application $f \circ g \circ f \circ g$ est injective. Montrer qu'alors les deux applications f et g sont bijectives.

DÉFINITION 1.11 : **Fonction caractéristique**

Soit un ensemble E et une partie $A \subset E$ de cet ensemble. On appelle *fonction caractéristique* de la partie A, l'application

$$\chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right.$$

THÉORÈME 1.5 : **Opérations usuelles en termes de fonction caractéristique**

Soit un ensemble E et deux parties $A \subset E$ et $B \subset E$ de cet ensemble. On définit de nouvelles fonctions à valeurs dans $\mathbb{N}$ par les formules :

$$(\chi_A + \chi_B) : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1,2\} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) + \chi_B(x) \end{array} \right. \qquad \chi_A \chi_B : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) \times \chi_B(x) \end{array} \right.$$

Avec ces notations, on caractérise les parties $A \cap B$, $E \setminus A$ et $A \cup B$:

$$\chi_{E \setminus A} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

Exercice 1-11

Soit un ensemble E. Pour deux parties $A \subset E$ et $B \subset E$, on appelle *différence symétrique* de ces deux parties, la partie de E définie par

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

a. Exprimer la fonction caractéristique de la partie $A \triangle B$ à l'aide des fonctions caractéristiques de A et de B ;

b. En déduire que pour trois parties $(A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$, on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Définition 1.12 : **Image directe, réciproque**
Soit une application $f : E \mapsto F$ et deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$.
a) On appelle *image réciproque* de B par f, la partie de E notée :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tq } f(x) \in B\}$$

b) On appelle *image directe* de A par f, la partie de F notée :

$$f(A) = \{y \in F \text{ tq } \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$$

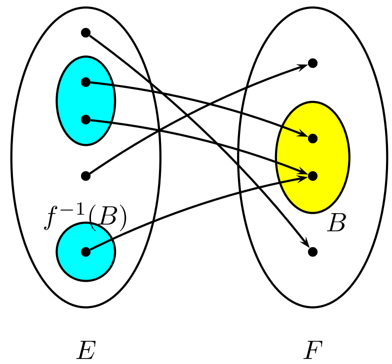


Fig. 1.5 – *Image réciproque*

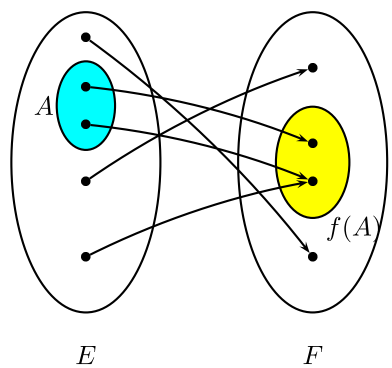


Fig. 1.6 – *Image directe*

Remarque 9. Attention, la notation $f^{-1}(B)$ n'a rien à voir avec une éventuelle bijection réciproque : $f^{-1}(B)$ est un *sous-ensemble* de l'ensemble de départ de f.

Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$: Calculons $f(x)$ $\ldots$ Donc $f(x) \in B$ Par conséquent, $x \in f^{-1}(B)$.

Pour montrer que $y \in f(A)$: Posons $x = \ldots$ On a bien $y = f(x)$ et $x \in A$. Par conséquent, $y \in f(A)$.

Remarque 10. L'image réciproque est en général plus facile à manier que l'image directe.
Remarque 11. Une application $f : E \mapsto F$ est surjective ssi $f(E) = F$.

Exercice 1-12

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}\right.$. Déterminez (après avoir vérifié que les notations sont correctes) :

- $f^{-1}(0)$;
- $f^{-1}(\{0\})$;
- $f^{-1}([0,+\infty[)$;
- $f([0,\pi])$;
- $f(\{0\})$;
- $f(\mathbb{R})$.

Exercice 1-13

Soit $f : E \mapsto F$, et $A_1,A_2 \subset E$, $B_1,B_2 \subset F$. Montrer que

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
4. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;
5. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
6. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
7. $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;
8. $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Définition 1.13 : **Partie stable**
Soit une application $f : E \mapsto E$, et une partie $A \subset E$. On dit que la partie A est *stable* par l'application f lorsque $f(A) \subset A$. Cela est équivalent à dire que :

$$\forall x \in A, f(x) \in A$$

1.4 Familles

Définition 1.14 : **Familles**
Soit un ensemble I (*les indices*) et un ensemble E. On appelle famille d'éléments de E indexée par I, une application

$$\phi : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \mapsto & a_i \end{array}\right.$$

On note cette application $(a_i)_{i \in I}$.

`Exemple 6.` Si $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$, cela définit une *suite* de réels.

Définition 1.15 : **Famille de parties**
Soit un ensemble E et un ensemble I. On définit une famille de parties de E :

$$(A_i)_{i \in I} \text{ où } \forall i \in I, A_i \in \mathcal{P}(E)$$

Et l'on note

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in I,\, x \in A_i\} \qquad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tq } \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

`Exemple 7.` Si $E = \mathbb{R}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = [-k,k]$, déterminez les ensembles

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \text{ et } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Exercice 1-14

Soit un ensemble E et une famille de parties de E, $(A_i)_{i \in I}$. Montrer que :

$$E \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)$$

$$E \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i)$$

Exercice 1-15

Soit une application $f : E \mapsto F$ et une famille de parties de F, $(B_i)_{i\in I}$. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

1.5 Relations

Définition 1.16 : Relation
Soit un ensemble E. Une *relation binaire* sur E est un sous-ensemble $G \subset E \times E$. Si $(x,y) \in E^2$, on écrira :

$$x\mathcal{R}y \iff (x,y) \in G$$

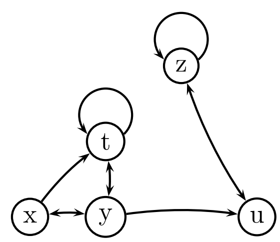


Fig. 1.7 – *Représentation sagittale d'une relation*

Définition 1.17 : Propriétés des relations
Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :
- *réflexive* ssi $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- *symétrique* ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *antisymétrique* ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;
- *transitive* ssi $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$;

1.5.1 Relation d'équivalence

Définition 1.18 : Relation d'équivalence
On dit qu'une relation sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est
1. réflexive ;
2. symétrique ;
3. transitive ;

`Exemple 8.` La relation d'égalité sur un ensemble :

$$x\mathcal{R}y \iff x = y$$

est une relation d'équivalence.

Définition 1.19 : Classes d'équivalence
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On note pour un élément $x \in E$:

$$C_x = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

L'ensemble C_x s'appelle la *classe d'équivalence* de l'élément x.

Définition 1.20 : **Partition**
Soit un ensemble E et une famille de parties de E : $(A_i)_{i\in I}$. On dit que cette famille de parties est une *partition* de l'ensemble E si et seulement si :

1. Chaque classe est non vide : $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$;
2. Les classes distinctes sont deux à deux disjointes : $\forall (i,j) \in I^2,\ C_i \cap C_j \neq \emptyset \Rightarrow C_i = C_j$;
3. Les classes recouvrent l'ensemble E : $\cup_{i\in I} A_i = E$.

Théorème 1.6 : **Les classes d'équivalence forment une partition**
Soit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E. La famille $(C_x)_{x\in E}$ des classes d'équivalences associées forme une partition de l'ensemble E.

Remarque 12. Réciproquement, étant donnée une partition $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E, on peut définir la relation définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I \mid x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

On montre que cette relation est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalences associées sont les ensembles A_i.

Exercice 1-16
Sur $E = \mathbb{Z}$, on définit la relation $n\mathcal{R}p \iff p - n$ est pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence et déterminer ses classes d'équivalences.

1.5.2 Relation d'ordre

Définition 1.21 : **Relation d'ordre**
Soit une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est :

1. réflexive ;
2. antisymétrique ;
3. transitive.

Remarque 13. Une relation d'ordre permet de *comparer* deux éléments. Lorsque $x\mathcal{R}y$, on dit que l'élément x est « plus petit » que l'élément y, et on préfère noter

$$x \preceq y$$

La transitivité et l'antisymétrie empêchent d'avoir un cycle formé d'éléments distincts de la forme :

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_n \preceq x_1$$

Définition 1.22 : **Ordre total**
Soit une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E. On dit que deux éléments $(x,y) \in E^2$ sont *comparables* pour cet ordre si et seulement si $x \preceq y$ ou alors $y \preceq x$.
Lorsque tous les couples d'éléments de l'ensemble E sont comparables, on dit que la relation d'ordre est *totale*.

Remarque 14. Soit un ensemble X et $E = \mathcal{P}(X)$. Sur l'ensemble E, on définit la relation

$$\forall (A,B) \in E^2, \quad A\mathcal{R}B \iff A \subset B$$

1. Montrez que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ;
2. Cet ordre est-il total ?

Remarque 15. Soit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$. On définit les deux relations d'ordre suivantes :

- L'*ordre produit* :
$$(x,y) \preceq_1 (x',y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$
- L'*ordre lexicographique* :
$$(x,y) \preceq_2 (x',y') \iff x \leq x' \text{ ou alors } x = x' \text{ et } y \leq y'$$

L'ordre produit est un ordre partiel et l'ordre lexicographique est un ordre total.

Définition 1.23 : Élements remarquables
Soit une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E et une partie $A \subset E$. On définit les notions suivantes :
- Un élément $M \in E$ est un *majorant* de la partie A si et seulement si $\forall a \in A,\ a \preceq M$;
- Un élément $m \in E$ est un *minorant* de la partie A si et seulement si $\forall a \in A,\ m \preceq a$;
- Un élément $a \in A$ est un *plus petit élément* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ a \preceq x$;
- Un élément $a \in A$ est un *plus grand élément* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \preceq a$;
- Un élément $m \in A$ est un *élément minimal* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow x = m$;
- Un élément $M \in A$ est un *élément maximal* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ M \leq x \Rightarrow x = M$.

Théorème 1.7 : Unicité d'un plus petit élément
Si $a \in A$ est un plus petit (grand) élément de la partie A, il est unique.

Remarque 16. Il se peut qu'il n'existe pas de plus petit (grand) élément d'une partie.

Exercice 1-17
Dans $\mathbb{N}$, on considère la relation de divisibilité :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad n/m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } m = kn$$

1. Vérifier que cette relation définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$;
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ admet-il un plus petit (grand) élément pour cet ordre ?
3. Quels sont les éléments maximaux (minimaux) de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ pour cet ordre ?

1.6 Loi de composition interne

Définition 1.24 : Loi de composition interne
Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une application de $E \times E$ dans E :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \mapsto & a \star b \end{array} \right.$$

Remarque 17. Pour simplifier les notations, on note $ab = a \star b = \phi(a,b)$. Il n'y a aucune raison à priori pour que $ab = ba$. On peut itérer une lci : si $(a,b,c) \in E^3$, on notera

$$(a \star b) \star c = \phi\big(\phi(a,b),c\big)$$

$$a \star (b \star c) = \phi\big(a,\phi(b,c)\big)$$

Il n'y a aucune raison à priori pour que ces deux éléments soient égaux.

Exemples :

- $E = \mathbb{N}$, la multiplication et l'addition des entiers sont des lci.
- Si G est un ensemble, sur $E = \mathcal{F}(G,G)$, la composition des applications définit une lci
- Si G est un ensemble, sur $\mathcal{P}(G)$, l'union et l'intersection définissent des lci.

Définition 1.25 : Propriétés d'une lci
Soit $\star$ une lci sur un ensemble E. On dit que $\star$ est :
- *commutative* ssi $\forall (a,b) \in E^2,\ a \star b = b \star a$
- *associative* ssi $\forall (a,b,c) \in E^3,\ a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$
- Un élément $e \in E$ est dit *neutre* ssi $\forall x \in E,\ e \star x = x \star e = x$

Pour montrer que $\star$ est commutative :

1. *Soit* $(x,y) \in E^2$
2. $x \star y = y \star x$
3. Donc $\star$ est commutative

Pour montrer que $\star$ est associative :

1. *soit* $(x,y,z) \in E^3$
2. $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
3. Donc $\star$ est associative

Pour montrer que $e \in E$ est neutre :

1. *Soit* $x \in E$
2. $e \star x = x$, $x \star e = x$
3. Donc e est neutre.

Exemples :

– $(\mathbb{N},+)$, $+$ est commutative et associative, 0 est l'unique élément neutre ;
– $(\mathbb{N},\times)$, $\times$ est commutative et associative, 1 est l'unique élément neutre ;
– $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\circ)$, $\circ$ est associative mais pas commutative. L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est un élément neutre ;
– $(\mathcal{P}(G),\cup)$, la loi est commutative, associative, la partie $\emptyset$ est neutre pour cette loi.

Remarque 18. Si une loi de composition interne est *commutative* et *associative*, on définit les notations suivantes pour $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$:

– Lorsque la loi est notée additivement, on définit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \dots + x_n$$

– et lorsque la loi est notée multiplicativement,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \star \dots \star x_n$$

THÉORÈME 1.8 : **Unicité de l'élément neutre**
Si $(E,\star)$ possède un élément neutre, il est unique.

DÉFINITION 1.26 : **Monoïde**
Un ensemble $(E,\star)$ muni d'une loi de composition interne associative et admettant un élément neutre est appelé un monoïde.

`Exemple 9.` $(\mathbb{N},+)$ est un monoïde d'élément neutre 0.

`Exemple 10.` On considère un ensemble fini A appelé *alphabet*, et on définit un *mot* sur A comme étant une suite finie de lettres de A. On notera $m = a_1 \dots a_n$ un tel mot. On définit également le mot vide ε. Sur l'ensemble $A^\star$ des mots de A, on définit la *concaténation* de deux mots : si $m_1 = a_1 \dots a_n$ et si $m_2 = b_1 \dots b_p$, on note $m_1.m_2 = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_p$. Alors l'ensemble des mots muni de la concaténation, $(A^\star,.)$ est un monoïde d'élément neutre le mot vide ε. Ce monoïde est très utilisé en informatique théorique en théorie des langages.

DÉFINITION 1.27 : **Symétrique**
On suppose que $(E,\star)$ possède un élément neutre e. Soit un élément $x \in E$. On dit qu'un élément $y \in E$ est un *symétrique* (ou un *inverse*) de l'élément x si et seulement si :

$$x \star y = y \star x = e$$

THÉORÈME 1.9 : **Unicité du symétrique**
Dans un monoïde $(E,\star)$, si un élément $x \in E$ possède un symétrique, ce symétrique est unique.

Pour montrer que $y \in E$ est l'inverse de $x \in E$:

1. $x \star y = e$;
2. $y \star x = e$;
3. Donc $y = x^{-1}$.

Remarque 19. Si un élément $x \in E$ possède un symétrique $y \in E$, alors l'élément y possède également un symétrique qui est l'élément x :

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

Remarque 20. L'élément neutre est toujours son propre symétrique : $e^{-1} = e$.

DÉFINITION 1.28 : **Groupe**
On appelle *groupe* un ensemble G muni d'une lci $\star$ vérifiant :

1. la loi $\star$ est associative ;
2. G possède un élément neutre ;
3. Tout élément x de G admet un symétrique.

Si de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

Remarque 21. Lors d'une étude abstraite d'un groupe, on note x^{-1} le symétrique d'un élément x (notation multiplicative). Mais si la lci est notée $+$, par analogie avec les groupes de nombres, le symétrique de l'élément x sera noté $-x$. C'est une difficulté qu'il faut bien comprendre !

`Exemple 11.` Dans les cas suivants, dire si l'ensemble est un groupe. Préciser l'élément neutre, et déterminer le symétrique éventuel d'un élément x :
$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathcal{B}(E,E),\circ)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\times)$.

THÉORÈME 1.10 : **Règles de calcul dans un groupe**
Soit $(G,\times)$ un groupe.

1. L'élément neutre est unique ;
2. Tout élément possède un *unique* symétrique ;
3. Pour tout élément x d'un groupe, on a $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.
4. On peut *simplifier* : $\forall(a,x,y) \in G^3$;

$$\begin{cases} a \star x = a \star y & \Rightarrow x = y \\ x \star a = y \star a & \Rightarrow x = y \end{cases}$$

5. Soit $(a,b) \in G^2$. L'équation $a \star x = b$ possède une unique solution :

$$x = a^{-1} \star b$$

6. $\forall(x,y) \in G^2$, $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

Chapitre 2

Les nombres complexes

2.1 Définitions

On définit les lois suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

- $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$
- $(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy',xy' + x'y)$.

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un *corps* commutatif noté $\mathbb{C}$.
Si $a \in \mathbb{R}$, on « identifie » a avec le complexe $(a,0)$.
En notant $i = (0,1)$, on vérifie que

- $i^2 = (-1,0)$
- $i \times (a,0) = (0,a)$

Et on adopte alors les notations définitives :

$$(a,b) = (a,0) + i \times (b,0) = a + ib$$

Définition 2.1 : **Partie réelle, imaginaire**
Soit $z = a + ib$, un complexe.

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la *partie réelle* de z
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la *partie imaginaire* de z.

Théorème 2.1 : **Conjugué d'un complexe**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. On a les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{1} = 1$

Les propriétés suivantes sont intéressantes pour caractériser les complexes réels et imaginaires purs :

- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$;
- $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -\overline{z}$.

Définition 2.2 : **Affixe, image**
Soit $M = (a,b)$ un point ou un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on appelle *affixe* de M de coordonnées (a,b) le nombre complexe $z = [M] = a + ib$.
Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors on pourra définir le *point image* et le vecteur image de z par $M = (a,b)$.

Remarque 22. $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie par rapport à Ox et $z \mapsto z + b$ représente la translation de vecteur l'image de b.

Définition 2.3 : **Module d'un nombre complexe**
C'est le réel défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

$|z - a|$ représente la distance du point d'affixe z au point d'affixe a.