Chapitre 2

Les nombres complexes

2.1 Définitions

On définit les lois suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

- $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$
- $(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy',xy' + x'y)$.

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un *corps* commutatif noté $\mathbb{C}$.
Si $a \in \mathbb{R}$, on « identifie » a avec le complexe $(a,0)$.
En notant $i = (0,1)$, on vérifie que

- $i^2 = (-1,0)$
- $i \times (a,0) = (0,a)$

Et on adopte alors les notations définitives :

$$(a,b) = (a,0) + i \times (b,0) = a + ib$$

DÉFINITION 2.1 : **Partie réelle, imaginaire**
Soit $z = a + ib$, un complexe.

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la *partie réelle* de z
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la *partie imaginaire* de z.

THÉORÈME 2.1 : **Conjugué d'un complexe**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. On a les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{1} = 1$

Les propriétés suivantes sont intéressantes pour caractériser les complexes réels et imaginaires purs :

- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$;
- $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -\overline{z}$.

DÉFINITION 2.2 : **Affixe, image**
Soit $M = (a,b)$ un point ou un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on appelle *affixe* de M de coordonnées (a,b) le nombre complexe $z = [M] = a + ib$.
Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors on pourra définir le *point image* et le vecteur image de z par $M = (a,b)$.

Remarque 22. $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie par rapport à Ox et $z \mapsto z + b$ représente la translation de vecteur l'image de b.

DÉFINITION 2.3 : **Module d'un nombre complexe**
C'est le réel défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

$|z - a|$ représente la distance du point d'affixe z au point d'affixe a.

Remarque 23. On exprime l'inverse d'un complexe non-nul à l'aide du conjugué :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

Remarque 24. Il faut savoir développer pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left|z + z'\right|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$$

PROPOSITION 2.2 : **Inégalité entre module et parties réelles-imaginaires**
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a les inégalités suivantes :

$$\left|\operatorname{Re} z\right| \leq |z| \text{ et } \left|\operatorname{Im} z\right| \leq |z|$$

THÉORÈME 2.3 : **Inégalité triangulaire**

1. Si $z,z' \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\left||z| - |z'|\right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

   avec égalité dans la dernière majoration si et seulement si les images des complexes z et z' sont sur une même demi-droite passant par l'origine.

2. Pour n complexes $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$$

THÉORÈME 2.4 : **Groupe** $(\mathbb{U},\times)$
L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication est un groupe multiplicatif noté $\left(U,\times\right)$.

DÉFINITION 2.4 : **Disque ouvert, fermé**
L'ensemble $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est appelé disque ouvert de centre a, de rayon r.
L'ensemble $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ est appelé disque fermé de centre a, de rayon r.

PROPOSITION 2.5 : **Calcul d'une somme géométrique**
Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. On appelle *somme géométrique*, la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$$

Cette somme se calcule :

$$\boxed{S_n = \begin{cases} (n+1) & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1 \end{cases}}$$

Exercice 2-1
Calculer pour $z \in \mathbb{C}$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$ la somme :

$$S_{n,p} = z^n + z^{n+1} + \dots + z^p = \sum_{k=n}^{p} z^k$$

2.2 Rappels de trigonométrie

On suppose connues les propriétés des fonctions sin, cos, tan et cotan ainsi que le cercle trigonométrique.

Exercice 2-2
Simplifier $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)$, $\cos(5\pi + \theta)$, $\tan(3\pi + \theta)$, $\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\tan(\frac{5\pi}{2} + \theta)$.

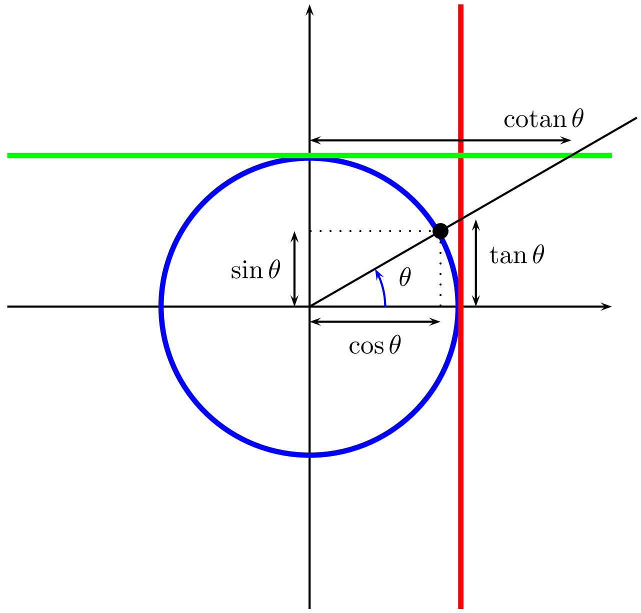


FIG. 2.1 – *Cercle trigonométrique*

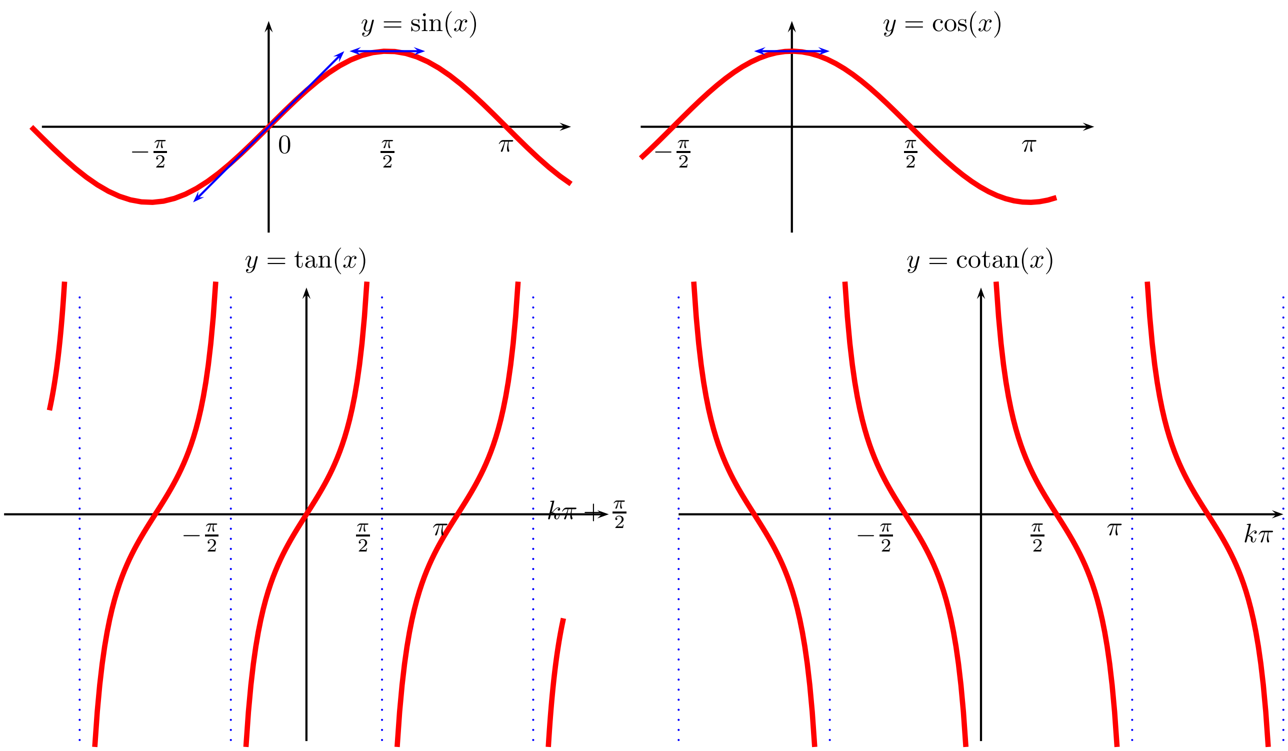


FIG. 2.2 – *Fonctions* sin, cos, tan *et* cotan

Exercice 2-3

Résoudre $\cos\theta = \cos\theta'$, $\sin\theta = \sin\theta'$, $\tan\theta = \tan\theta'$.

PROPOSITION 2.6 : **Formules fondamentales**

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Exercice 2-4

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 2-5

Simplifier $\sqrt{1+\cos\theta}$, $\sqrt{1-\cos\theta}$.

Exercice 2-6

Exprimer $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$. Exprimer de même $\sin(3\theta)$.

PROPOSITION 2.7 : **Autres formules à connaître**

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)$$

Remarque 25. Il n'y a pas de transformation générale de $\cos p \pm \sin q$.

Exercice 2-7

Factoriser $\sin\theta + \cos\theta$.

Proposition 2.8 : **Angle moitié**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\boxed{t = \tan \frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$. Alors :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

2.3 Exponentielle imaginaire et applications en trigonométrie

Définition 2.5 : **Exponentielle imaginaire**
Soit un réel $\theta \in \mathbb{R}$, on note
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Proposition 2.9 : **Propriétés de l'exponentielle imaginaire**

1. $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$
3. $e^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, tq $\theta = 2k\pi$
4. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\theta = \theta' + 2k\pi$.

Théorème 2.10 : **L'exponentielle est un morphisme de groupes**
Pour deux réels $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$
En d'autres termes, l'application
$$exp : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (U,\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$$
est un morphisme de groupes, de noyau
$$\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
et d'image $\mathrm{Im}\exp = U$.

Théorème 2.11 : **Formules de De Moivre[a] et d'Euler[b]**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n}$$
$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$
Ces deux formules, plus la formule du binôme et le calcul de sommes géométriques sont fondamentales en trigonométrie.
On utilise également la factorisation de l'angle moitié :
$$\boxed{e^{ix} + 1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos(\frac{x}{2})}$$
$$\boxed{e^{ix} - 1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}}\sin(\frac{x}{2})}$$

[a] Abraham De Moivre, (26/05/1667), Français. Auteur de la formule attribuée injustement à Stirling
[b] Leonhard Euler, (15/04/1707-18/09/1783), Suisse. Un des mathématiciens les plus productif. Il a trouvé un nombre incroyable de formules

Remarque 26. On a la factorisation de l'angle moitié plus générale (voir figure 2.3) :

$$e^{ix}+e^{iy}=e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right)=2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

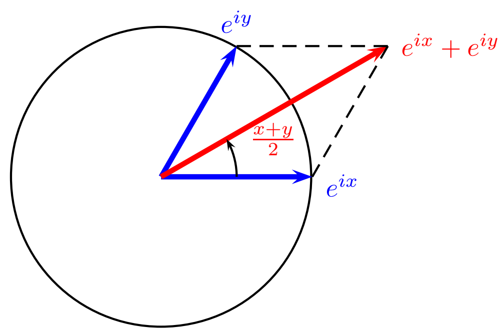


FIG. 2.3 – *Factorisation de l'angle moitié*

Calculs trigonométriques à connaître parfaitement

Pour exprimer $\cos n\theta = T_n(\theta)$ où (T_n est le nième polynôme de Tchebychev)

1. Écrire $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \dfrac{(e^{i\theta})^n+(e^{-i\theta})^n}{2}$;
2. Utiliser la formule du binôme ;
3. Regrouper les deux sommes et on sépare les indices pairs et impairs.

Pour *linéariser* $\cos^n\theta$ (ou $\sin^n\theta$) :

1. Écrire $\cos^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$;
2. Développer avec la formule du binôme ;
3. Regrouper dans les sommes les termes conjugués ;
4. Distinguer les cas n pair et n impair ;
5. Retransformer en cosinus.

Pour calculer $S_n = 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

1. Introduire la somme $U_n = 1+e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta}$ qui est une somme géométrique, et alors $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$;
2. Pour simplifier le résultat, factoriser l'angle moitié.

DÉFINITION 2.6 : **Argument d'un nombre complexe**
Soit un nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ non-nul : $\boxed{z\neq 0}$. Alors

$$\exists\theta\in\mathbb{R},\quad z=re^{i\theta}$$

avec $r=|z|\neq 0$ qui est le *module* de z. On dit que θ est un argument de z et on note $\theta=\mathrm{Arg}(z)$.
Si $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a

$$\mathrm{Arg}(z\times z')=\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,z'+2k\pi$$

Remarque 27. L'argument n'est pas unique: il est défini à 2π près. On peut imposer l'unicité de l'argument en le choisissant dans un intervalle de longueur 2π (en général $[0,2\pi[$ ou $]-\pi,\pi]$).

Exercice 2-8
Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z=1+e^{i\theta}$, ($\theta\in\mathbb{R}$).

DÉFINITION 2.7 : **Exponentielle complexe**
Pour $z=a+ib\in\mathbb{C}$, on définit

$$e^z=e^{a+ib}=e^ae^{ib}$$

(Son module vaut e^a et son argument b).

Exercice 2-9

On considère l'application exp : $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \right.$.

a. Résoudre l'équation $e^z = 1$.
b. Résoudre l'équation $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
b. Déterminer l'image d'une droite $x = a$ par exp.
c. Déterminer l'image d'une droite $y = b$ par exp.

2.4 Racines d'un nombre complexe

2.4.1 Extraction de racine carrée par résolution algébrique (à éviter)

On considère un nombre complexe non nul $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ et l'on cherche les nombres complexes $Z = X + iY$ vérifiant $Z^2 = z$.

1. Cela revient à résoudre le système :

$$X^2 + (-Y^2) = x, \quad X^2(-Y^2) = \frac{-y^2}{4}$$

2. Si l'on connaît la somme et le produit de deux nombres réels, ils sont solutions d'une équation du second degré.
3. On étudie les signes.
4. On trouve finalement

$$Z = \varepsilon\Big(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i\ \mathrm{sg}(y)\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\Big) \quad \varepsilon \in \{-1,1\}$$

2.4.2 Extraction de racine carrée par résolution trigonométrique

On écrit $z = |z|e^{i\theta}$ avec $|z| \neq 0$. On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ vérifiant $Z^2 = z$.
On trouve alors deux racines distinctes :

$$Z_1 = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad Z_2 = \sqrt{|z|}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -Z_1$$

Exercice 2-10

Trouver une racine carrée de $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 2-11

En utilisant la résolution trigonométrique et algébrique, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2.4.3 Equation du second degré.

$$az^2 + bz + c = 0 \quad ((a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ a \neq 0)$$

1. On met cette équation sous forme réduite :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

2. on introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
3. (a) si $\Delta = 0$, on trouve une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$,
   (b) si $\Delta \neq 0$, on trouve deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

   où δ est une racine carrée complexe de Δ.

Remarque 28. Pour une équation du second degré de la forme

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

former le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$, et si δ est une racine carrée de Δ', les deux solutions s'écrivent

$$z_1 = -b - \delta, \quad z_2 = -b + \delta$$

Remarque 29. Lorsque les coefficients (a,b,c) sont réels, former le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et étudier son signe :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exercice 2-12

Résoudre l'équation complexe

$$z^2 - 2z(\cos u + i \sin u) + 2i \sin u(\cos u + i \sin u) = 0 \quad (u \in]-\pi,\pi[)$$

2.4.4 Racines nièmes de l'unité

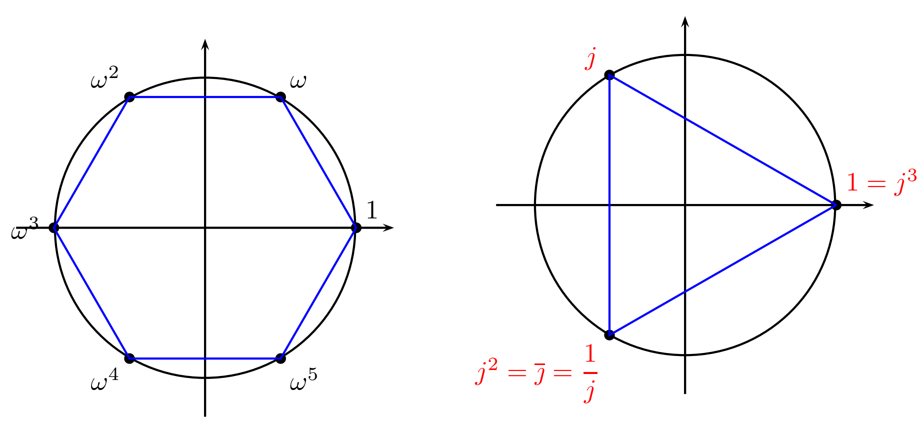
Soit un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine nième de l'unité est une solution de l'équation

$$z^n = 1$$

On les cherche sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ et l'on trouve exactement n racines nièmes distinctes :

$$\boxed{U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}};\ k \in [\![0,n-1]\!]\} = \{\omega^k;\ k \in [\![0,n-1]\!]\}}$$

où $\boxed{\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}}$ s'appelle la racine nième primitive de l'unité.



(a) racines sixièmes de l'unité

(b) Raines cubiques de l'unité

FIG. 2.4 – *Racines nièmes de l'unité*

THÉORÈME 2.12 : Groupe des racines de l'unité
L'ensemble des racines nièmes de l'unité, $(U_n,\times)$ est un groupe fini de cardinal n.

Théorème 2.13 : **La somme des racines nièmes de l'unité est nulle**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

Remarque 30. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ la racine cubique primitive de l'unité, et on a les relations :

$$U_3 = \{1,j,j^2\}, \quad j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j} \quad 1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 2-13

Déterminer les complexes de module 1 vérifiant $|z+1| = 1$.

Exercice 2-14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, puis ensuite l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$.

Exercice 2-15

Calculer le produit de toutes les racines nièmes de l'unité.

Exercice 2-16

On considère un triangle (ABC) du plan. On considère les complexes (a,b,c) affixes des points A, B et C. Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$

2.4.5 Racines nièmes d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe non nul $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On veut résoudre l'équation $Z^n = z$. On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ et on trouve n solutions distinctes. En notant ω la racine nième primitive de l'unité :

$$\mathcal{S} = \{\ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega^k \ ;\ k \in [\![0,n-1]\!]\}$$

Exercice 2-17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
