# Chapitre 2

# Les nombres complexes

## 2.1 Définitions

On définit les lois suivantes sur $\mathbb{R}^2$ :

- $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$
- $(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$.

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un *corps* commutatif noté $\mathbb{C}$.
Si $a\in\mathbb{R}$, on « identifie » $a$ avec le complexe $(a,0)$.
En notant $i=(0,1)$, on vérifie que

- $i^2=(-1,0)$
- $i\times(a,0)=(0,a)$

Et on adopte alors les notations définitives :

$$(a,b)=(a,0)+i\times(b,0)=a+ib$$

Définition 2.1 : **Partie réelle, imaginaire**
Soit $z=a+ib$, un complexe.

- $a=\mathrm{Re}(z)$ est la *partie réelle* de $z$
- $b=\mathrm{Im}(z)$ est la *partie imaginaire* de $z$.

Théorème 2.1 : **Conjugué d'un complexe**
Soit $z=a+ib$ un nombre complexe. Le *conjugué* de $z$ est le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$. On a les propriétés suivantes :

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- $\overline{1}=1$

Les propriétés suivantes sont intéressantes pour caractériser les complexes réels et imaginaires purs :

- $z\in\mathbb{R}\iff\overline{z}=z$ ;
- $z\in i\mathbb{R}\iff\overline{z}=-\overline{z}$.

Définition 2.2 : **Affixe, image**
Soit $M=(a,b)$ un point ou un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on appelle *affixe* de $M$ de coordonnées $(a,b)$ le nombre complexe $z=[M]=a+ib$.
Soit $z=a+ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors on pourra définir le *point image* et le vecteur image de $z$ par $M=(a,b)$.

*Remarque* 22. $z\mapsto\bar{z}$ représente la symétrie par rapport à $Ox$ et $z\mapsto z+b$ représente la translation de vecteur l'image de $b$.

Définition 2.3 : **Module d'un nombre complexe**
C'est le réel défini par

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\overline{z}}$$

$|z-a|$ représente la distance du point d'affixe $z$ au point d'affixe $a$.

*Remarque* 23. On exprime l'inverse d'un complexe non-nul à l'aide du conjugué :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

*Remarque* 24. Il faut savoir développer pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left|z + z'\right|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(z\overline{z'}\big) + |z'|^2$$

PROPOSITION 2.2 : **Inégalité entre module et parties réelles-imaginaires**
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a les inégalités suivantes :

$$\left|\mathrm{Re}\, z\right| \le |z| \text{ et } \left|\mathrm{Im}\, z\right| \le |z|$$

THÉORÈME 2.3 : **Inégalité triangulaire**

1. Si $z,z' \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\Big||z| - |z'|\Big| \le |z + z'| \le |z| + |z'|}$$

   avec égalité dans la dernière majoration si et seulement si les images des complexes $z$ et $z'$ sont sur une même demi-droite passant par l'origine.
2. Pour $n$ complexes $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1 + \cdots + z_n| \;\le\; |z_1| + \cdots + |z_n|$$

THÉORÈME 2.4 : **Groupe** $(\mathbb{U},\times)$
L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication est un groupe multiplicatif noté $\big(U,\times\big)$.

DÉFINITION 2.4 : **Disque ouvert, fermé**
L'ensemble $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est appelé disque ouvert de centre $a$, de rayon $r$.
L'ensemble $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \le r\}$ est appelé disque fermé de centre $a$, de rayon $r$.

PROPOSITION 2.5 : **Calcul d'une somme géométrique**
Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. On appelle *somme géométrique*, la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

Cette somme se calcule :

$$\boxed{S_n = \begin{cases} (n+1) & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \ne 1 \end{cases}}$$

*Exercice 2-1*
Calculer pour $z \in \mathbb{C}$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$ la somme :

$$S_{n,p} = z^n + z^{n+1} + \cdots + z^p = \sum_{k=n}^{p} z^k$$

---

## 2.2 Rappels de trigonométrie

On suppose connues les propriétés des fonctions sin, cos, tan et cotan ainsi que le cercle trigonométrique.

*Exercice 2-2*
Simplifier $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)$, $\cos(5\pi + \theta)$, $\tan(3\pi + \theta)$, $\mathrm{cotan}(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\tan(\frac{5\pi}{2} + \theta)$.

---

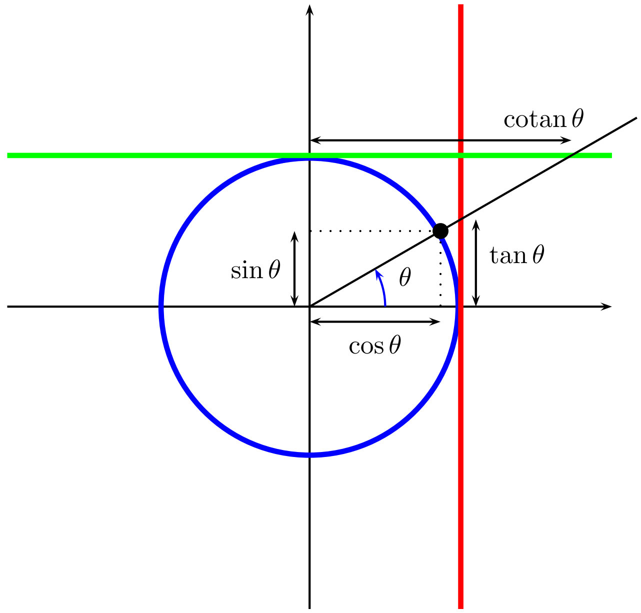



FIG. 2.1 – *Cercle trigonométrique*

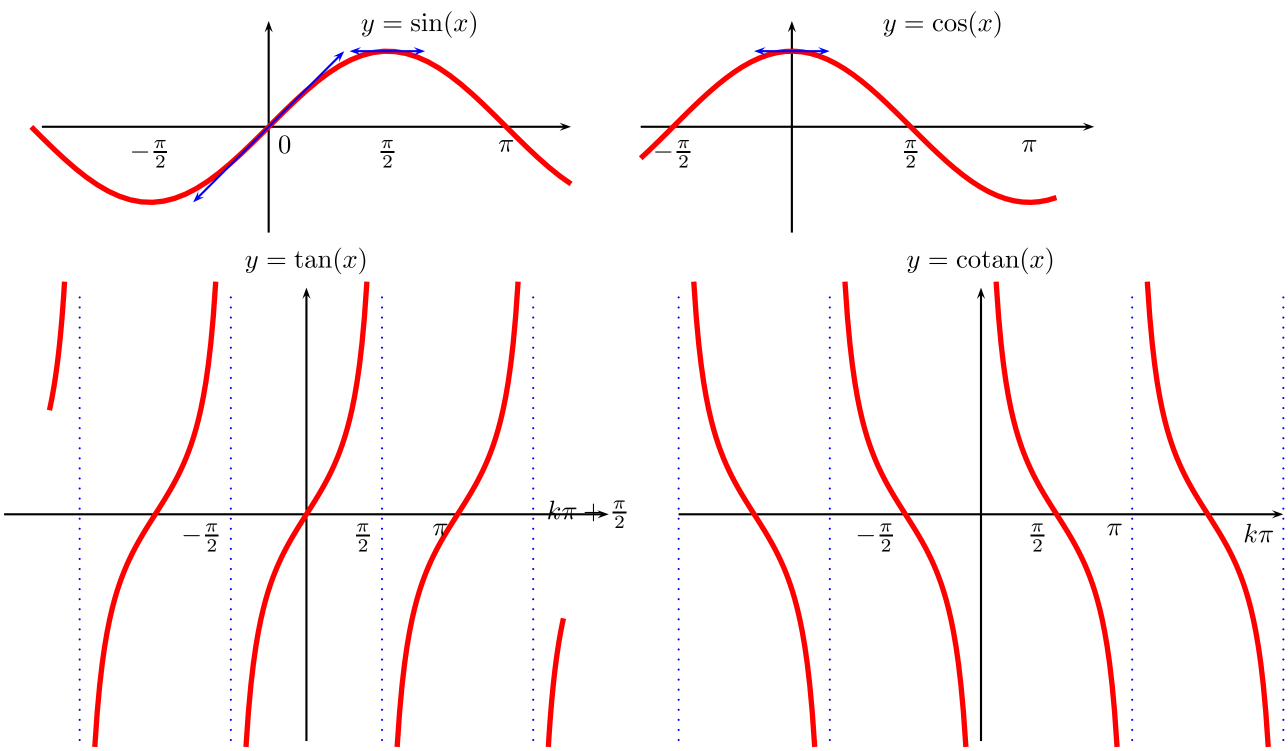



FIG. 2.2 – *Fonctions* sin, cos, tan *et* cotan

*Exercice 2-3*

Résoudre $\cos\theta = \cos\theta'$, $\sin\theta = \sin\theta'$, $\tan\theta = \tan\theta'$.

---

PROPOSITION 2.6 : **Formules fondamentales**

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a\\
&\sin(2a) = 2\sin a\cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}\\
\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}
\end{aligned}$$

*Exercice 2-4*

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta$.

---

*Exercice 2-5*

Simplifier $\sqrt{1+\cos\theta}$, $\sqrt{1-\cos\theta}$.

---

*Exercice 2-6*

Exprimer $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$. Exprimer de même $\sin(3\theta)$.

---

PROPOSITION 2.7 : **Autres formules à connaître**

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]\\
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
\sin p - \sin q &= 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)
\end{aligned}$$

*Remarque* 25. Il n'y a pas de transformation générale de $\cos p \pm \sin q$.

*Exercice 2-7*

Factoriser $\sin\theta + \cos\theta$.

---

Proposition 2.8 : **Angle moitié**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\boxed{t = \tan\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$. Alors :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

## 2.3 Exponentielle imaginaire et applications en trigonométrie

Définition 2.5 : **Exponentielle imaginaire**
Soit un réel $\theta \in \mathbb{R}$, on note
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Proposition 2.9 : **Propriétés de l'exponentielle imaginaire**

1. $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$
3. $e^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, tq $\theta = 2k\pi$
4. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\theta = \theta' + 2k\pi$.

Théorème 2.10 : **L'exponentielle est un morphisme de groupes**
Pour deux réels $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$

En d'autres termes, l'application

$$exp : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (U,\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes, de noyau

$$\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

et d'image $\mathrm{Im}\exp = U$.

Théorème 2.11 : **Formules de De Moivre [a] et d'Euler [b]**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Ces deux formules, plus la formule du binôme et le calcul de sommes géométriques sont fondamentales en trigonométrie.
On utilise également la factorisation de l'angle moitié :

$$\boxed{e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\boxed{e^{ix}-1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

[a] Abraham De Moivre, (26/05/1667), Français. Auteur de la formule attribuée injustement à Stirling
[b] Leonhard Euler, (15/04/1707-18/09/1783), Suisse. Un des mathématiciens les plus productif. Il a trouvé un nombre incroyable de formules

*Remarque* 26. On a la factorisation de l'angle moitié plus générale (voir figure 2.3) :

$$e^{ix}+e^{iy}=e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right)=2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

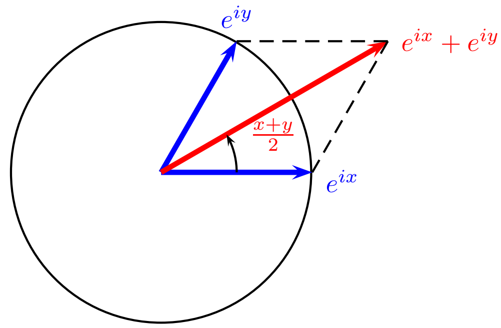



FIG. 2.3 – *Factorisation de l'angle moitié*

**Calculs trigonométriques à connaître parfaitement**

Pour exprimer $\cos n\theta = T_n(\theta)$ où ($T_n$ est le nième polynôme de Tchebychev)

1. Écrire $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \dfrac{(e^{i\theta})^n+(e^{-i\theta})^n}{2}$ ;
2. Utiliser la formule du binôme ;
3. Regrouper les deux sommes et on sépare les indices pairs et impairs.

Pour *linéariser* $\cos^n\theta$ (ou $\sin^n\theta$) :

1. Écrire $\cos^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ ;
2. Développer avec la formule du binôme ;
3. Regrouper dans les sommes les termes conjugués ;
4. Distinguer les cas $n$ pair et $n$ impair ;
5. Retransformer en cosinus.

Pour calculer $S_n = 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

1. Introduire la somme $U_n = 1+e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta}$ qui est une somme géométrique, et alors $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$ ;
2. Pour simplifier le résultat, factoriser l'angle moitié.

DÉFINITION 2.6 : **Argument d'un nombre complexe**
Soit un nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ non-nul : $\boxed{z\neq 0}$. Alors

$$\exists\theta\in\mathbb{R},\quad z=re^{i\theta}$$

avec $r=|z|\neq 0$ qui est le *module* de $z$. On dit que $\theta$ est un argument de $z$ et on note $\theta=\mathrm{Arg}(z)$.
Si $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a

$$\mathrm{Arg}(z\times z')=\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,z'+2k\pi$$

*Remarque* 27. L'argument n'est pas unique: il est défini à $2\pi$ près. On peut imposer l'unicité de l'argument en le choisissant dans un intervalle de longueur $2\pi$ (en général $[0,2\pi[$ ou $]-\pi,\pi]$).

*Exercice 2-8*
Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z=1+e^{i\theta}$, ($\theta\in\mathbb{R}$).

DÉFINITION 2.7 : **Exponentielle complexe**
Pour $z=a+ib\in\mathbb{C}$, on définit

$$e^z=e^{a+ib}=e^ae^{ib}$$

(Son module vaut $e^a$ et son argument $b$).

*Exercice 2-9*

On considère l'application exp : $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \right.$ .

a. Résoudre l'équation $e^z = 1$.
b. Résoudre l'équation $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
b. Déterminer l'image d'une droite $x = a$ par exp.
c. Déterminer l'image d'une droite $y = b$ par exp.

---

## 2.4 Racines d'un nombre complexe

### 2.4.1 Extraction de racine carrée par résolution algébrique (à éviter)

On considère un nombre complexe non nul $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ et l'on cherche les nombres complexes $Z = X + iY$ vérifiant $Z^2 = z$.

1. Cela revient à résoudre le système :

$$X^2 + (-Y^2) = x, \quad X^2(-Y^2) = \frac{-y^2}{4}$$

2. Si l'on connaît la somme et le produit de deux nombres réels, ils sont solutions d'une équation du second degré.
3. On étudie les signes.
4. On trouve finalement

$$Z = \varepsilon\left(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i \ \mathrm{sg}(y)\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right) \quad \varepsilon \in \{-1,1\}$$

### 2.4.2 Extraction de racine carrée par résolution trigonométrique

On écrit $z = |z|e^{i\theta}$ avec $|z| \neq 0$. On cherche $Z$ sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ vérifiant $Z^2 = z$.
On trouve alors deux racines distinctes :

$$Z_1 = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad Z_2 = \sqrt{|z|}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -Z_1$$

*Exercice 2-10*

Trouver une racine carrée de $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

---

*Exercice 2-11*

En utilisant la résolution trigonométrique et algébrique, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

---

### 2.4.3 Equation du second degré.

$$az^2 + bz + c = 0 \quad ((a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ a \neq 0)$$

1. On met cette équation sous forme réduite :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

2. on introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
3. (a) si $\Delta = 0$, on trouve une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$,
   (b) si $\Delta \neq 0$, on trouve deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où $\delta$ est une racine carrée complexe de $\Delta$.

*Remarque* 28. Pour une équation du second degré de la forme

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

former le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$, et si $\delta$ est une racine carrée de $\Delta'$, les deux solutions s'écrivent

$$z_1 = -b - \delta, \quad z_2 = -b + \delta$$

*Remarque* 29. Lorsque les coefficients $(a,b,c)$ sont réels, former le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et étudier son signe :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :
$$x = -\frac{b}{2a}$$
3. Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

*Exercice 2-12*

Résoudre l'équation complexe

$$z^2 - 2z(\cos u + i \sin u) + 2i \sin u(\cos u + i \sin u) = 0 \quad (u \in ]-\pi,\pi[)$$

---

### 2.4.4 Racines nièmes de l'unité

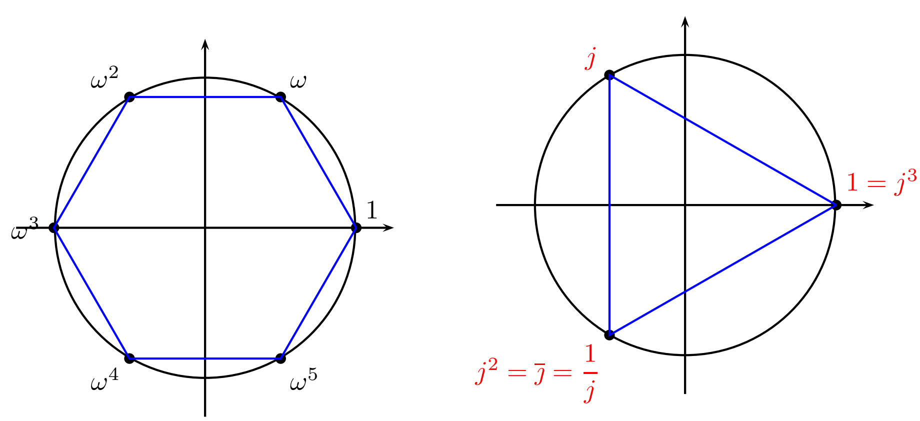
Soit un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine nième de l'unité est une solution de l'équation

$$z^n = 1$$

On les cherche sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ et l'on trouve exactement $n$ racines nièmes distinctes :

$$\boxed{U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}};\ k \in [\![0,n-1]\!]\} = \{\omega^k;\ k \in [\![0,n-1]\!]\}}$$

où $\boxed{\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}}$ s'appelle la racine nième primitive de l'unité.




(a) racines sixièmes de l'unité

(b) Raines cubiques de l'unité

Fig. 2.4 – *Racines nièmes de l'unité*

**Théorème 2.12 : Groupe des racines de l'unité**
L'ensemble des racines nièmes de l'unité, $(U_n,\times)$ est un groupe fini de cardinal $n$.

**Théorème 2.13 : La somme des racines nièmes de l'unité est nulle**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

*Remarque* 30. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ la racine cubique primitive de l'unité, et on a les relations :

$$U_3 = \{1,j,j^2\}, \quad j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j} \quad 1 + j + j^2 = 0$$

*Exercice 2-13*

Déterminer les complexes de module 1 vérifiant $|z + 1| = 1$.

---

*Exercice 2-14*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, puis ensuite l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$.

---

*Exercice 2-15*

Calculer le produit de toutes les racines nièmes de l'unité.

---

*Exercice 2-16*

On considère un triangle $(ABC)$ du plan. On considère les complexes $(a,b,c)$ affixes des points $A$, $B$ et $C$. Montrer que le triangle $(ABC)$ est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$

---

### 2.4.5 Racines nièmes d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe non nul $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On veut résoudre l'équation $Z^n = z$. On cherche $Z$ sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ et on trouve $n$ solutions distinctes. En notant $\omega$ la racine nième primitive de l'unité :

$$\mathcal{S} = \{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega^k \ ; \ k \in [\![0,n-1]\!]\}$$

*Exercice 2-17*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$.

---