

Chapitre 6

Géométrie de l'espace

6.1 Modes de repérage dans l'espace

DÉFINITION 6.1 : systèmes liés

On dit que trois vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de l'espace forment un système *lié* si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres. Si un système n'est pas lié, on dit qu'il est *libre*. Alors tout vecteur de l'espace s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. On dit que le système est une *base* de l'espace.

DÉFINITION 6.2 : Repère cartésien

Un repère cartésien de l'espace est la donnée d'un point (l'origine du repère) et de trois vecteurs formant une base de l'espace. On note $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un tel repère. Si M est un point du plan, le vecteur $\vec{\Omega M}$ se décompose de façon unique sur les vecteurs de la base :

$$\vec{\Omega M} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

On note $M \begin{array}{l} |x \\ y \\ z \\ \mathcal{R} \end{array}$ et on dit que les scalaires x, y, z sont les *coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère \mathcal{R} .

THÉORÈME 6.1 : Formules de changement de repère

Soient deux repères cartésiens $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{R}' = (\Omega', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ et un point M . On note :

$$M \begin{array}{l} |x \\ y \\ z \\ \mathcal{R} \end{array}, M \begin{array}{l} |x' \\ y' \\ z' \\ \mathcal{R}' \end{array}, \Omega' \begin{array}{l} |\alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \mathcal{R} \end{array}$$

Alors les coordonnées du point M dans le repère \mathcal{R} s'expriment en fonction des coordonnées de M dans le repère \mathcal{R}' sous la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y = \beta + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z = \gamma + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}$$

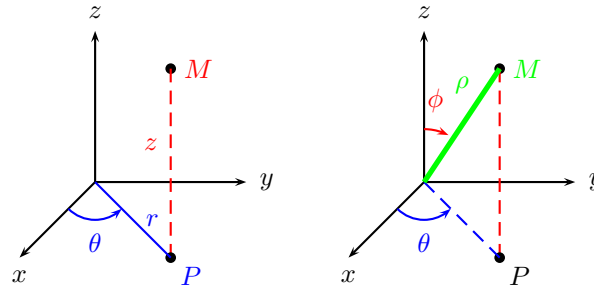
Remarque 42. Orientation de l'espace, angle entre vecteurs, angle entre droites.

DÉFINITION 6.3 : Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

DÉFINITION 6.4 : Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$



(a) Coordonnées cylindriques (b) Coordonnées sphériques

FIG. 6.1 – Coordonnées cylindriques et sphériques

6.2 Produit scalaire

DÉFINITION 6.5 : Produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et on définit le produit scalaire de ces deux vecteurs par :

$$(\vec{u}_1 | \vec{u}_2) = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

et on définit la *norme* d'un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

PROPOSITION 6.2 : Propriétés du produit scalaire

- bilinéarité** : soient trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ et deux scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:
 - $(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 = \lambda \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 + \mu \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$
 - $\vec{u}_1 \cdot (\lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{u}_3) = \lambda \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \mu \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3$
- symétrie** : Pour deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1$.

- Remarque 43.* – On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.
- On dit qu'un vecteur est unitaire lorsque sa norme vaut 1.
 - On dit qu'une base est *orthonormale* lorsque les trois vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux et unitaires.
 - On dit qu'un repère est *orthonormé* lorsque sa base est orthonormale.

PROPOSITION 6.3 : Coordonnées d'un vecteur dans une bon

Dans une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, un vecteur \vec{x} se décompose sous la forme :

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{x} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3$$

PROPOSITION 6.4 : Calcul du produit scalaire dans une bon

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormale quelconque et si

$$\begin{cases} \vec{u} &= x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 \\ \vec{u}' &= x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3 \end{cases}$$

alors $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$.

DÉFINITION 6.6 : Distance entre deux points

On définit la distance entre deux points A et B de l'espace par :

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Si \mathcal{R} est un repère orthonormé et si $A \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$,

$$d(A,B) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

6.3 Produit vectoriel**LEMME 6.5 : Colinéarité de deux vecteurs**

Deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

DÉFINITION 6.7 : Produit vectoriel

On appelle *produit vectoriel* de deux vecteurs

$$\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

le vecteur

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

PROPOSITION 6.6 : Propriétés du produit vectoriel

1. le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

2. le produit vectoriel est bilinéaire :

$$- \vec{u}_1 \wedge (\lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{u}_3) = \lambda \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \mu \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3$$

$$- (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \wedge \vec{u}_3 = \lambda \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 + \mu \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$$

3. le produit vectoriel est antisymétrique: $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 = -\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$,

4. le produit vectoriel est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs : $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = \vec{u}_2 \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = \vec{0}$.

5. On a la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) \vec{u}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_3$$

6. Identité de Lagrange :

$$\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|^2 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2 = \|\vec{u}_1\|^2 \|\vec{u}_2\|^2$$

Remarque 44. 1. D'après la formule de Lagrange, si \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont deux vecteurs non-nuls, il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 &= \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos \theta \\ \|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\| &= \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \sin \theta \end{cases}$$

On appelle θ l'angle non-orienté entre les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

2. $\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

3. Soit une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Comme $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ est un vecteur unitaire orthogonal à \vec{e}_1 et à \vec{e}_2 , $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_3$. On dit que la base orthonormale est *directe* lorsque $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ et *indirecte* sinon. On dispose de la « règle du tire-bouchon » pour se représenter une base directe de l'espace.

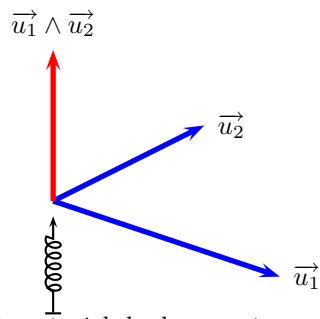


FIG. 6.2 – Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace

PROPOSITION 6.7 : Calcul du produit vectoriel dans une base orthonormale directe

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormale directe, et si $\vec{u}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$, alors

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

6.4 Déterminant, produit mixte

DÉFINITION 6.8 : Produit mixte

On appelle *produit mixte* (ou *déterminant*) de trois vecteurs, le réel :

$$\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

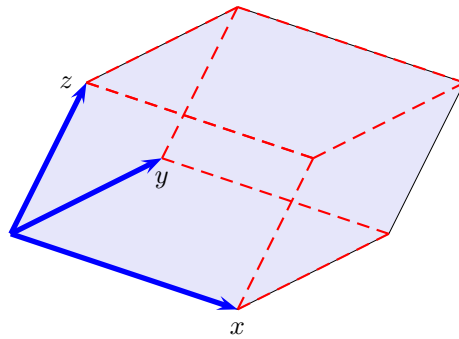


FIG. 6.3 – Interprétation du produit mixte

PROPOSITION 6.8 : Propriétés du produit mixte

1. **trilinéarité** : le produit mixte est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.
2. Si deux des trois vecteurs sont égaux, le produit mixte est nul.
3. **antisymétrie** : en permutant deux vecteurs, on change le produit mixte en son opposé.
4. **condition de coplanarité** : trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.
5. **interprétation géométrique** : le produit mixte de trois vecteurs représente le volume algébrique du parallélepède construit sur les trois vecteurs.

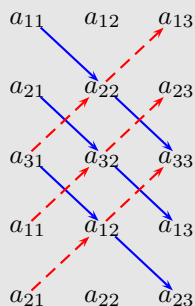
PROPOSITION 6.9 : Calcul du produit mixte dans une base directe

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormale directe, pour trois vecteurs

$$\vec{u}_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, \vec{u}_2 \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}, \vec{u}_3 \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3$$

On utilise la *règle de Sarrus* pour se souvenir de cette formule :



6.5 Droites et plans

PROPOSITION 6.10 : Représentation paramétrique d'une droite

Soit \mathcal{D} la droite affine passant par le point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et dirigée par le vecteur non-nul $\vec{u} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$. Un point

$M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient à cette droite si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

PROPOSITION 6.11 : Représentation paramétrique d'un plan

Soit \mathcal{P} le plan affine passant par le point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix}, \vec{u}_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}$ non-

colinéaires. Un point $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient à ce plan si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}$$

PROPOSITION 6.12 : Équation carésienne d'un plan

Soit \mathcal{P} le plan affine passant par le point $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et dirigé par les deux vecteurs non-colinéaires $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix}$,

$\vec{u}_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}$. Un point $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient à ce plan si et seulement si :

$$\text{Det}(\vec{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$$

ce qui donne une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Le plan vectoriel dirigeant \mathcal{P} a pour équation cartésienne :

$$ax + by + cz = 0$$

(supprimer la constante dans les équations affines). Le vecteur $\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan \mathcal{P} .

PROPOSITION 6.13 : Plan passant par trois points

Soient trois points $A_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$, $A_2 \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ et $A_3 \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$ non-alignés. Un point $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient au plan passant

par ces trois points si et seulement si $\text{Det}(\vec{A_1M}, \vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}) = 0$ ce qui donne l'équation cartésienne de ce plan :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

PROPOSITION 6.14 : Plan passant par un point et normal à un vecteur

Soit un point $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et un vecteur $\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$. L'équation cartésienne du plan passant par A et normal à

\vec{n} est :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

PROPOSITION 6.15 : Deux plans perpendiculaires

Soient deux plans affines donnés par leur équation cartésienne :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = h$$

$$\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z = h'$$

Ces deux plans sont perpendiculaires si et seulement si :

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

PROPOSITION 6.16 : Équations cartésiennes d'une droite

Une droite affine peut être vue comme intersection de deux plans non-parallèles :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

où un vecteur directeur de la droite est :

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq \vec{0}$$

Remarque 45. 1. Il n'y a pas unicité des deux plans qui définissent une droite.

2. Une façon rapide d'obtenir une équation de droite consiste à éliminer le paramètre d'une équation paramétrique.
3. Les plans contenant la droite \mathcal{D} ont pour équation cartésienne :

$$\mathcal{P}_\lambda(ax + by + cz + d) + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

(sauf le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$). On appelle cette famille de plans le *faisceau de plans* issu de la droite \mathcal{D} .

THÉORÈME 6.17 : Distance d'un point à un plan donné par son équation cartésienne

Soit un plan \mathcal{P} d'équation cartésienne :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

et un point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$. La distance du point M_0 au plan \mathcal{P} est donnée par la formule :

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

THÉORÈME 6.18 : Distance d'un point à un plan passant par trois points

Soit le plan affine \mathcal{P} passant par trois points non-alignés A , B et C et un point M . La distance entre le point M et le plan \mathcal{P} est donnée par :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\text{Det}(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

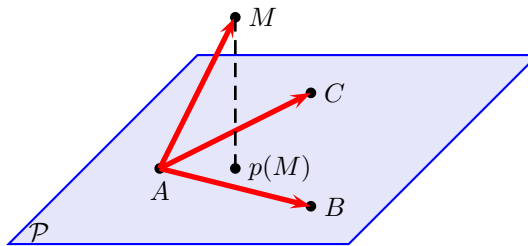


FIG. 6.4 – Distance d'un point à un plan

THÉORÈME 6.19 : Distance d'un point à une droite

Soit \mathcal{D} la droite passant par le point A dirigée par le vecteur \vec{u} non-nul et un point M de l'espace. La distance du point M à la droite est donnée par la formule :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

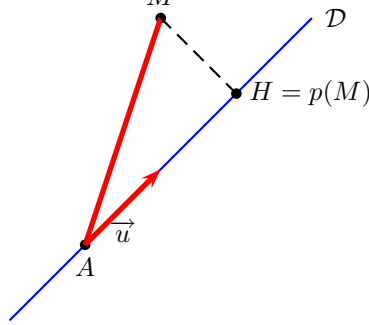


FIG. 6.5 – Distance d'un point à une droite de l'espace

PROPOSITION 6.20 : Équation normale d'un plan

Soit un vecteur unitaire $\vec{u} \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$. Définissons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} \end{cases}$. Alors les lignes

de niveau de la fonction f sont des plans affines :

$$f(M) = h \iff \boxed{ax + by + cz = h}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Le vecteur \vec{u} est un vecteur orthogonal à ce plan et $|h| = d(0, \mathcal{P})$.

6.6 Sphères

DÉFINITION 6.9 : Sphère

On appelle *sphère* de centre A et de rayon $R > 0$, l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $d(A, M) = R$.

PROPOSITION 6.21 : Équation d'une sphère

1. Dans un repère orthonormé d'origine A , la sphère a pour équation réduite

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}.$$

2. Dans un repère orthonormé quelconque, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$$
 est soit :

- vide,
- réduit à un point,
- une sphère.

Remarque 46. On peut utiliser les coordonnées sphériques pour paramétrer une sphère de centre l'origine du repère :

$$\begin{cases} x & = R \cos \theta \sin \phi \\ y & = R \sin \theta \sin \phi \\ z & = R \cos \phi \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [-\pi, \pi]$$

PROPOSITION 6.22 : Intersection d'un plan et d'une sphère

Soit une sphère \mathcal{S} de centre A et de rayon R et un plan affine \mathcal{P} .

1. Si $d(A, \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$,
2. Si $d(A, \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{M_0\}$, (on dit que le plan est *tangent* à la sphère),
3. Si $d(A, \mathcal{P}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(A, \mathcal{P})}$ et de centre H , le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .

PROPOSITION 6.23 : Intersection d'une droite et d'une sphère

Soit une sphère \mathcal{S} de centre A et de rayon R et une droite affine \mathcal{D} .

1. Si $d(A, \mathcal{D}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \emptyset$,
2. Si $d(A, \mathcal{D}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \{M_0\}$, (on dit que la droite est *tangente* à la sphère),
3. Si $d(A, \mathcal{D}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ est réduit aux deux points de la droite \mathcal{D} situés à distance $\sqrt{R^2 - d^2(A, \mathcal{D})}$ du point H .

PROPOSITION 6.24 : Intersection de deux sphères

Soient deux sphères \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 non-concentriques, l'intersection de ces deux sphères peut être :

1. vide,
2. réduite à un point,
3. un cercle.