Chapitre 3

Fonctions usuelles

3.1 Théorèmes d'analyse admis

Nous utiliserons dans ce chapitre des théorèmes d'analyse que nous démontrerons plus tard.

THÉORÈME 3.1 : **Fonctions constantes**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$. La fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Remarque 31. On déduit de ce théorème que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

THÉORÈME 3.2 : **Théorème de la bijection**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :

- H1 continue sur I ;
- H2 strictement monotone sur I.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

THÉORÈME 3.3 : **Dérivation de la bijection réciproque**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :

- H1 f est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable au point x_0 ;
- H3 $f'(x_0) \neq 0$.

On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si :

- H1 $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable sur l'intervalle I ;
- H3 $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$;

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

3.2 Calcul pratique de dérivées

Dérivée d'une homographie

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x) = \frac{au(x)+b}{cu(x)+d} \quad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cu(x)+d)^2}u'(x)$$

Exercice 3-1
Dériver $f(x) = \dfrac{3x\ln x + 1}{2x\ln x + 3}$.

Dérivée d'un quotient

$$f(x) = \frac{u(x)}{v^n(x)} \quad (n \geq 2) \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{v^n(x)} - n\frac{u(x)v'(x)}{v^{n+1}(x)}$$

Lorsque $n \geq 2$, on préfère dériver avec la formule d'un produit.

Exercice 3-2
Dériver la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}$ en utilisant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$ et en la dérivant sous forme de produit. Conclusion?

Dérivée logarithmique

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{f_i'(x)}{f_i(x)}$$

Exercice 3-3
Dériver la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+3)(x+4)}$.

Exponentielle en facteur

$$\theta(x) = e^{a(x)}f(x) \quad \theta'(x) = e^{a(x)}[f'(x) + a'(x)f(x)]$$

Remarque 32. Cette règle de calcul est utile pour résoudre des équations (inéquations) différentielles. Lorsqu'on rencontre un groupement :

$$f'(x) + a(x) \times f(x)$$

on considère une primitive A de la fonction a, et on introduit la fonction

$$g(x) = e^{A(x)}f(x) \text{ car } g'(x) = e^{A(x)}[f'(x) + a(x)f(x)]$$

Exercice 3-4
Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall x \geq 0,\ f'(x) + f(x) \leq 1$. Montrer que la fonction f est majorée.

Règle de la chaîne

$$f(x) = f_1 \circ \cdots \circ f_n(x) \quad f'(x) = [f_1' \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)] \times [f_2' \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n(x)] \times \cdots \times f_n'(x)$$

Exercice 3-5
Dériver la fonction définie par $f(x) = \sin\left[\ln\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right]$.

Remarque 33. On calcule souvent des dérivées pour étudier leur signe. Comme la dérivation en chaîne donne un produit de fonctions, il suffit de déterminer le signe de chacun des morceaux.

3.3 Fonctions usuelles

3.3.1 Exponentielles, logarithmes

Exponentielle

On suppose connue la fonction exponentielle et ses propriétés fondamentales. Vous verrez l'année prochaine la bonne façon de définir l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

L'exponentielle réalise un morphisme de groupes :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^{+,*},\times) \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$. Elle satisfait donc l'équation différentielle $f' = f$. On a l'inégalité classique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\exp(x) \geq 1 + x}$$

Logarithme népérien

L'exponentielle est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $I = \mathbb{R}$ vers $J =]0, +\infty[$ On définit le logarithme népérien comme sa bijection réciproque.

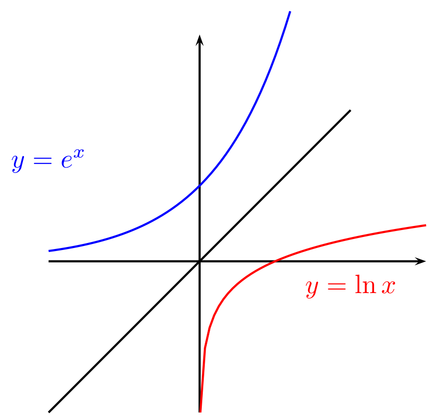


FIG. 3.1 – *Exponentielle et logarithme*

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right.$$

Comme la fonction exp est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et que $\forall x \in I$, $\exp'(x) \neq 0$, sa bijection réciproque ln est dérivable sur $J =]0, +\infty[$ et $\forall x \in J =]0, +\infty[$, $\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$. La fonction ln vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall x,y > 0 \quad \boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$$

On a les inégalités classiques :

$$\forall x > -1, \quad \boxed{\ln(1 + x) \leq x}$$

Exponentielle de base a : $a^x = e^{x \ln a}$

On définit également pour $a > 0$ l'exponentielle de base a :

$$f_a \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x = e^{x \ln a} \end{array} \right.$$

Elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

Elle est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ (comme composée) et sa dérivée vaut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a'(x) = (\ln a) e^{ax}$$

- Si $a = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = 1$;
- Si $a > 1$, alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si $0 < a < 1$, alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

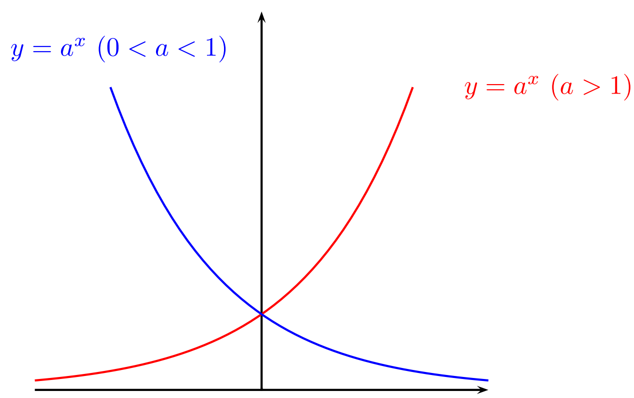


FIG. 3.2 – *Exponentielles en base a*

Logarithme de base a : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Lorsque $a > 0$ et $a \neq 1$, l'exponentielle de base a est une fonction f_a continue sur $I = \mathbb{R}$, et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I vers J. On note $\log_a$ sa bijection réciproque (qui est donc continue sur $J =]0, +\infty[$ de même sens de variation que f_a).
Comme la fonction f_a est dérivable sur l'intervalle I et que $\forall x \in I$, $f_a'(x) \neq 0$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur l'intervalle $J =]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in J =]0, +\infty[, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{(\ln a)x}$$

Le logarithme en base a vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

On peut exprimer le logarithme de base a à l'aide du logarithme népérien :

$$\forall x > 0, \quad \boxed{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

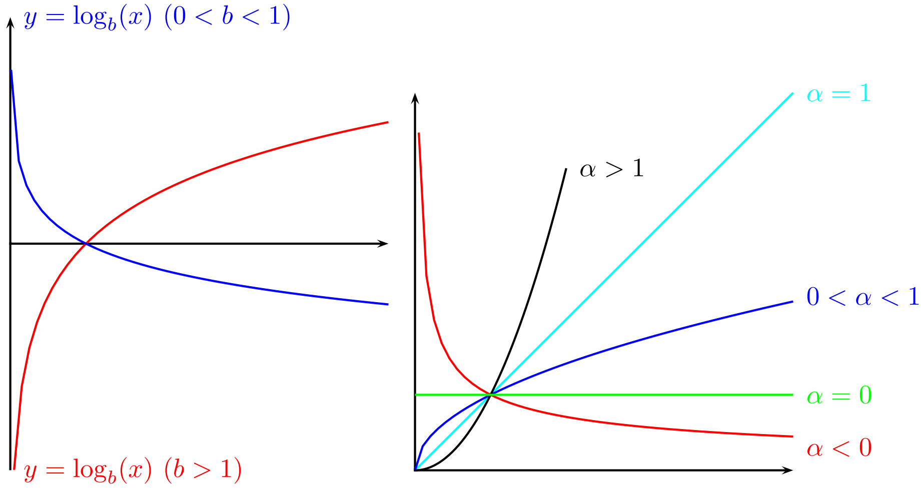
3.3.2 Fonctions puissance $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$$

f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction composée) et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f_a'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. En notant $I =]0, +\infty[$,

- Si $\alpha = 0$, f_α est constante et vaut 1.



(a) logarithmes en base b

(b) fonctions puissances

FIG. 3.3 – *logarithmes et puissances*

- Si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur I.
- Si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur I.

Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger par continuité f_α et 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Etudions la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée (encore notée f_α) :

- Si $\alpha > 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 0$.
- Si $\alpha = 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 1$.
- Si $0 < \alpha < 1$, f_α n'est pas dérivable en 0 (demi- tangente verticale).

Comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star$, f_α est continue sur $I =]0, +\infty[$ et strictement monotone sur I, elle est bijective de I vers $J =]0, +\infty[$. On montre alors que

$$f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$$

3.3.3 Fonctions hyperboliques et circulaires

Fonctions circulaires

Etude des fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \qquad \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$$

On a les propriétés suivantes :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad \cos x + i \sin x = e^{ix}$$
$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \qquad \cos x - i \sin x = e^{-ix}$$
$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1} \qquad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$
$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \qquad \cos' x = -\sin x$$
$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \qquad \sin' x = \cos x$$
$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

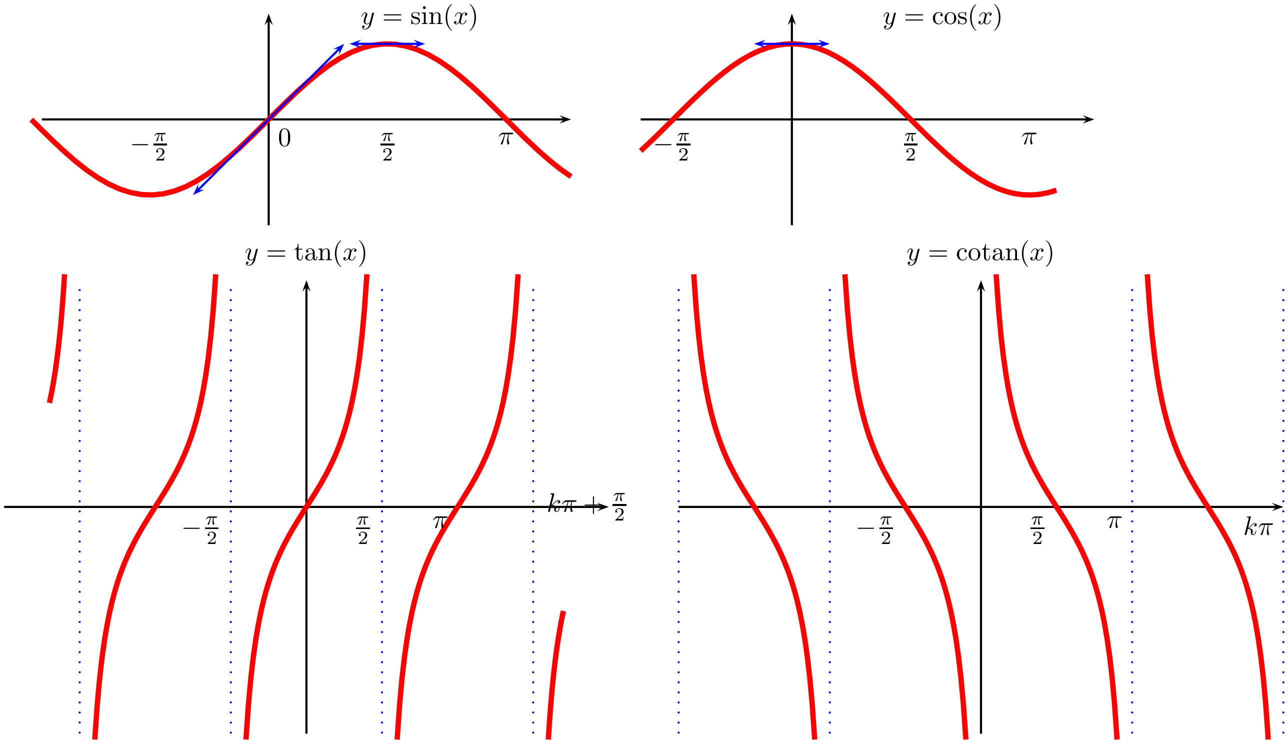


Fig. 3.4 – *Fonctions* sin, cos, tan *et* cotan

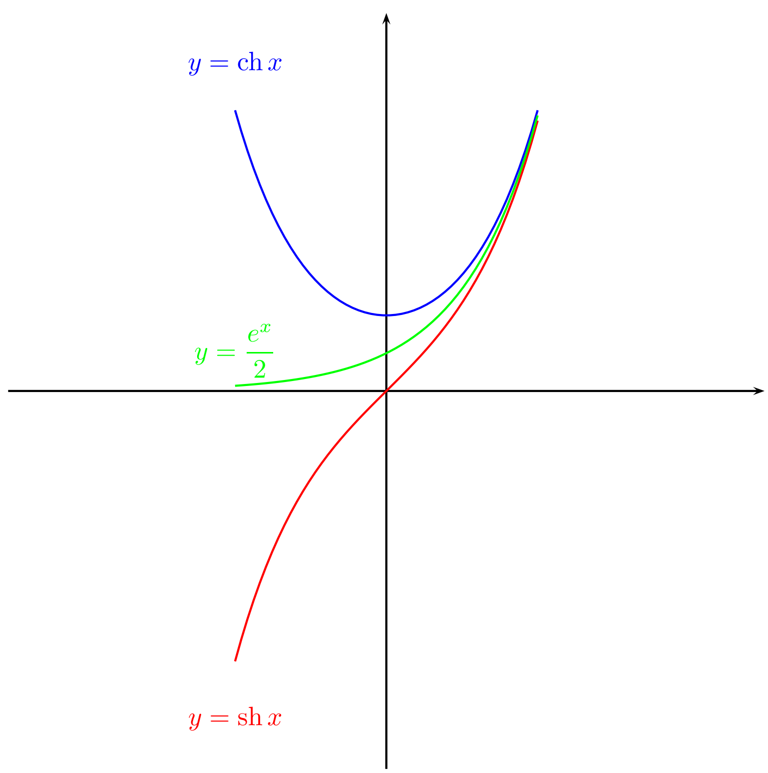


Fig. 3.5 – *Fonctions* sh *et* ch

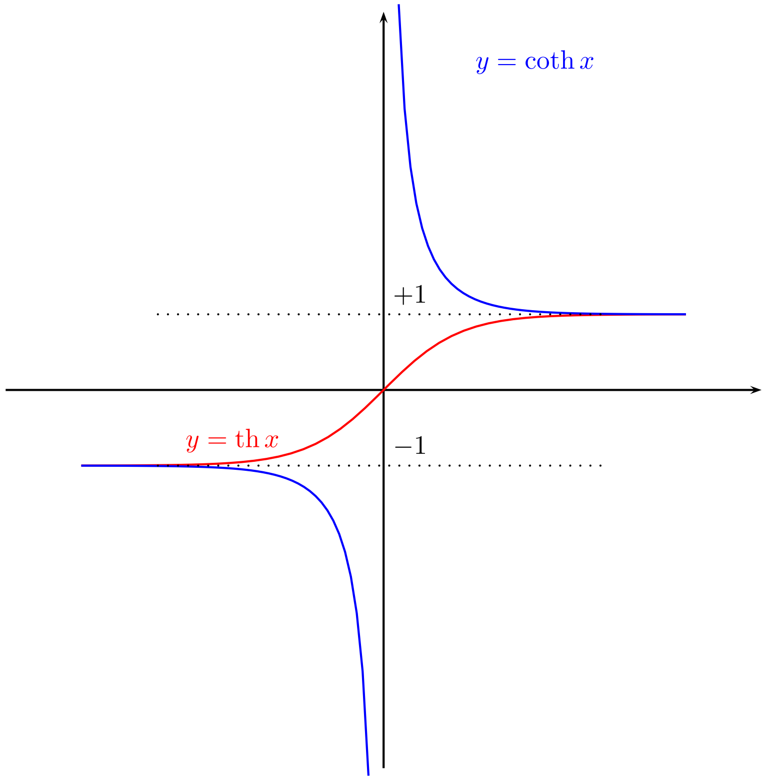


FIG. 3.6 – *Fonctions* th *et* coth

- $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$.
- On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh} x \leq \frac{e^x}{2} \leq \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent, la courbe $y = \dfrac{e^x}{2}$ est asymptote aux deux courbes $y = \operatorname{sh} x$ et $y = \operatorname{ch} x$ et on a la position des courbes par rapport à la courbe asymptote.

Trigonométrie

Les formules à connaître par coeur :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \end{array}}$$

A connaître également par coeur :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a & \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a \\ \sin 2a = 2 \sin a \cos a & \operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2} & \operatorname{ch}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2} \\ \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2} & \operatorname{sh}^2 a = \dfrac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2} \end{array}}$$

$$
\begin{array}{ll}
1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} & 1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b} & \operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1+\operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\
\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} & \operatorname{th}(a-b) = \dfrac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1-\operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\
\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} & \operatorname{th}(2a) = \dfrac{2\operatorname{th} a}{1+\operatorname{th}^2 a}
\end{array}
$$

Formules utiles également en intégration (elles permettent d'exprimer les fonctions trigonométriques comme fractions rationnelles en t) :

$$
\begin{array}{ll}
t = \tan(\dfrac{x}{2}) & t = \operatorname{th}(\dfrac{x}{2}) \\
\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\
\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\
\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} & \operatorname{th} x = \dfrac{2t}{1+t^2}
\end{array}
$$

3.3.4 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

Sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est continue strictement croissante vers $[-1,1]$. On définit sa bijection réciproque $\arcsin : [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. La fonction arcsin est impaire et on a les propriétés suivantes :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], &\quad \arcsin(\sin x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \sin(\arcsin x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

La fonction arcsin est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangentes verticales en -1 et 1) et $\forall x \in]-1,1[$,

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

On a donc une primitive à connaître :

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C}$$

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$
\begin{aligned}
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin(1/2) &= \frac{\pi}{6} \\
\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{\pi}{4} \\
\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) &= \frac{\pi}{3} \\
\arcsin(1) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

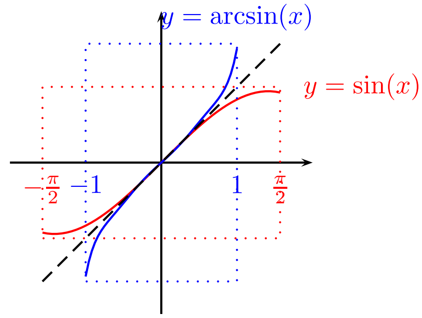


FIG. 3.7 – *Restriction de* sin *à* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *et fonction* arcsin

Fonction arccos

Sur $[0,\pi]$, la fonction cosinus est continue strictement croissante vers $[-1,1]$. On définit sa bijection réciproque $\arccos : [-1,1] \mapsto [0,\pi]$. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,\pi], &\quad \arccos(\cos x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \cos(\arccos x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \\
\forall x \in [-1,1],\, x \neq 0, &\quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

La fonction arccos est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangente verticale en -1 et 1), et $\forall x \in]-1,1[$,

$$\boxed{(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

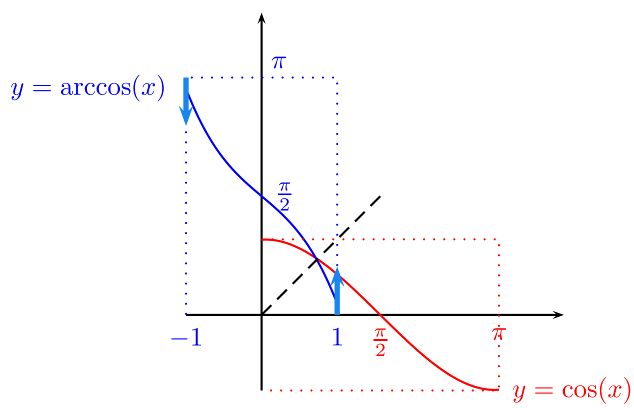


FIG. 3.8 – *Restriction de* cos *à* $[0,\pi]$ *et fonction* arccos

La relation suivante lie les fonctions arcsin et arccos. En pratique, on transforme la fonction arccos en arcsin dans les études de fonctions :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$$

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$$
$$\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$$
$$\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$$
$$\arccos(1) = 0$$

Fonction arctan

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tangente est continue strictement croissante vers $\mathbb{R}$. On définit sa bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right], \arctan(\tan x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Une primitive très importante :

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + C}$$

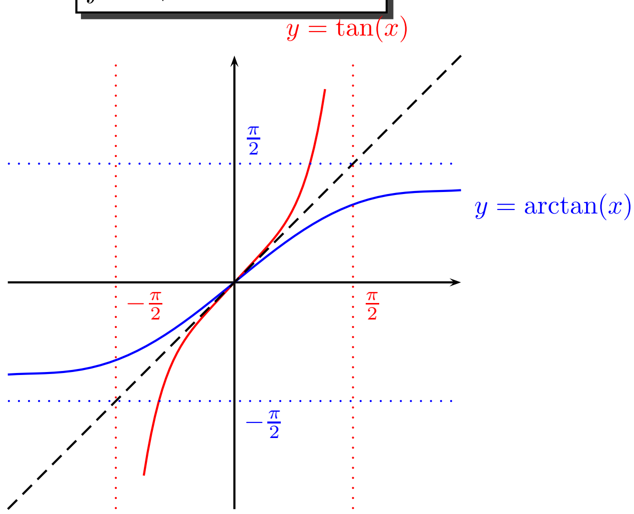


Fig. 3.9 – *Restriction de* tan *à* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et fonction* arctan.

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\arctan(0) = 0$$
$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$$
$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}} \quad (\varepsilon = sg(x))$$

Exercice 3-6

Pour $x \in \mathbb{R}$, trouver une expression sans fonction trigonométrique de $\arcsin(\sin x)$.

Exercice 3-7

Soient $(a,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax \neq 1$. Montrer que

$$\arctan a + \arctan x = \arctan \frac{a+x}{1-ax} + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon \in \{-1,0,1\})$$

Exercice 3-8

Simplifier pour $x \in]-1,1[$, $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 3-9

Étudier la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\big(\operatorname{th}(x)\big) - \arctan\big(\operatorname{sh}(2x)\big)$.

3.3.5 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argsh

La fonction sh réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty,\infty[$ vers $J =]-\infty,\infty[$. On appelle $\operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1}$ sa bijection réciproque.

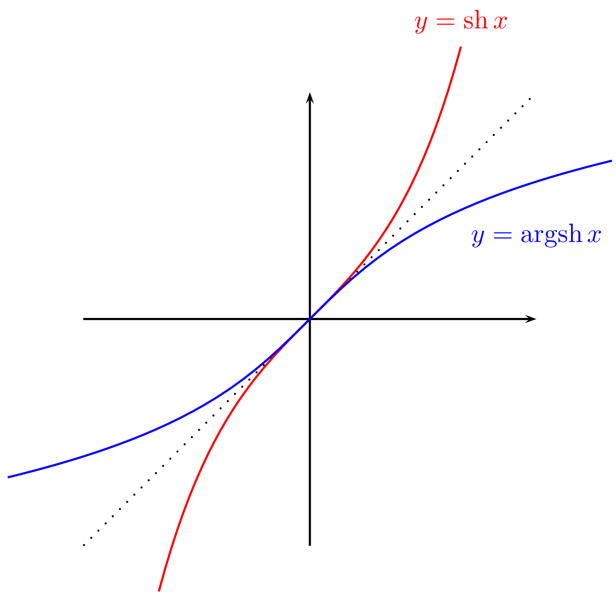


Fig. 3.10 – *Fonctions* sh *et* argsh

La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

On a l'expression logarithmique de argsh :

$$\boxed{\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$$

On en déduit que

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argsh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C}$$

Fonction argch

La restriction de la fonction ch à l'intervalle $I = [0, +\infty[$ réalise une bijection strictement croissante de I vers $[1, +\infty[$. On appelle $\operatorname{argch} = \operatorname{ch}^{-1}$ sa bijection réciproque.

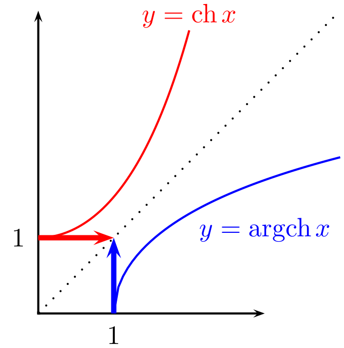


FIG. 3.11 – *Fonctions* ch *et* argch

La fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \boxed{\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

On a l'expression logarithmique :

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

et on en déduit la primitive :

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = \operatorname{argch} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C}$$

Fonction argth

La fonction th réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle $I =]-\infty, +\infty[$ vers l'intervalle $J =]-1, 1[$. On appelle $\operatorname{argth} = \operatorname{th}^{-1}$ sa bijection réciproque.

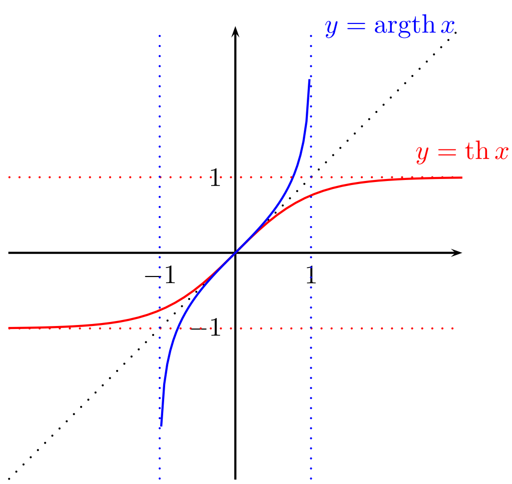


FIG. 3.12 – *Fonctions* th *et* argth

La fonction argth est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \boxed{\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}}$$

On a l'expression logarithmique :

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

3.3.6 Etude d'une fonction

DÉFINITION 3.1 : **Asymptotes** Soit $f : [c, +\infty] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une courbe $y = g(x)$ est *asymptote* à la courbe $y = f(x)$ en $+\infty$ ssi

$$g(x) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

En particulier, une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f ssi

$$f(x) - [ax + b] \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

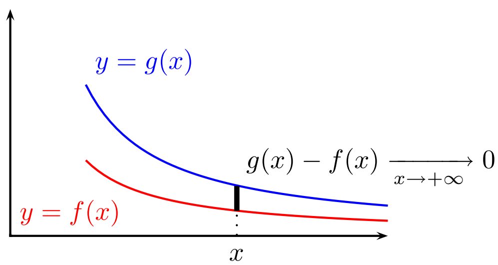


FIG. 3.13 – *Courbes asymptotes lorsque* $x \to +\infty$

Méthode pratique de recherche d'asymptotes

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, la droite horizontale $y = l$ est asymptote. On lit sur le tableau de variations la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$, on cherche un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.
3. Si $f(x) \sim ax$, ($a \in \mathbb{R}^*$) on calcule $f(x) - ax$ et on cherche la limite de $f(x) - ax$. Si $f(x) - ax \to b \in \mathbb{R}$, la droite $y = ax + b$ est asymptote. On détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote en cherchant un équivalent de $f(x) - [ax + b]$.
4. Si $\dfrac{f(x)}{x} \to \infty$, on dit qu'on a une branche parabolique de direction $(0y)$. Si $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$, une branche parabolique de direction $(0x)$.
5. Si $f(x) \sim ax^2$, $(a \neq 0)$, on peut rechercher des paraboles asymptotes.

Plan d'étude d'une fonction

1. Trouver le domaine de définition.
2. Calculer la dérivée (factoriser) et étudier son signe.
3. Tableau de variations. On précise les valeurs *exactes* remarquables, les limites et les prolongements éventuels (on étudie alors la dérivabilité de la fonction prolongée).
4. Recherche d'éventuelles asymptotes.
5. Tracé approximatif de la courbe $y = f(x)$: on représente les asymptotes éventuelles, les tangentes horizontales

Remarque 34. La représentation de valeurs particulières numériques obtenues à l'aide de la calculatrice ne présente en général aucun intérêt !

Exercice 3-10
Étudier la fonction définie par $f(x) = x^{x+1}$.

3.3.7 Fonction exponentielle complexe

Dérivée d'une fonction complexe

DÉFINITION 3.2 : **Dérivée d'une fonction complexe**
Si $f : \left\{ \begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) = f_1(x) + i f_2(x) \end{array} \right.$ est une fonction complexe, où $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$ sont deux fonctions réelles dérivables, on définit la dérivée de f par :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$$

PROPOSITION 3.4 : **Dérivée d'un produit**
Soient deux fonctions complexes dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{C}$ et $g : I \mapsto \mathbb{C}$. La fonction $fg : I \mapsto \mathbb{C}$ est dérivable sur l'intervalle I et

$$\forall x \in I,\ (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Exponentielle complexe

THÉORÈME 3.5 : **Dérivée de l'exponentielle complexe**
Soit $\phi : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction complexe dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\psi : \left\{ \begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\phi(x)} \end{array} \right.$$

est dérivable sur l'intervalle I et

$$\forall x \in I,\ \psi'(x) = \phi'(x) \times e^{\phi(x)}$$