

INTERROGATION SUR LES COMPLEXES

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est 3 cm.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z du plan associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}.$$

1- On considère les points A , B et C du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + 2i; \quad z_B = 1; \quad z_C = 3i.$$

Déterminer les formes algébriques des affixes des points A' , B' et C' , images respectives de A , B et C par f .

Placer les points A , B , C , A' , B' , C' .

2- On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f (i.e. tel que $z' = z$) est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

Tracer (D) . Que constate-t-on ?

4. Soient M un point quelconque du plan et M' son image par f . Montrer que M' appartient à la droite (D) .

5.a) Montrer que pour tout nombre complexe z : $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\frac{z' - z}{z_A}$ est réel.

b) En déduire que si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. a) Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' par f ?

On étudiera les deux cas, suivant que N appartient ou non à (D) .

b) Effectuer la construction sur la figure pour un point quelconque n' appartenant pas à (D) .