Vendredi 8 octobre 2010

DEVOIR SURVEILLE N°1

Exercice 1 : (6 points)

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 0,5 \\ U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}} \end{cases}$

1- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$.

2- Montrer que (U_n) est croissante ; en déduire qu'elle converge.

3- Déterminer la limite de (U_n).

4- Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$; retrouver la limite de la suite.

Exercice 2 : (7 points)

On considère les suites (U_n) et (V_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 4V_n}{5} \end{cases}$

1- On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = V_n - U_n$.
Montrer que la suite (d_n) est géométrique, et exprimer d_n à l'aide de n.

2- Montrer que (U_n) et (V_n) sont des suites adjacentes.

3- On considère la suite (s_n), définie pour tout entier naturel n par $s_n = 2\,U_n + 5\,V_n$.

a) Montrer que la suite (s_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 3 : R.O.C. (2 points)

Montrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

Pour chaque question, il y a plusieurs conclusions correctes. Elles doivent toutes être cochées.
Chaque réponse correcte rapporte des points, chaque réponse fausse enlève des points. Une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.
Il n'est demandé aucune justification.

NOM :

On considère trois suites : (U_n), (V_n) et (W_n) qui vérifient la propriété suivante :
« pour tout entier naturel n strictement positif : $U_n \leq V_n \leq W_n$ ».

1- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 2$, alors :

◊ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

◊ La suite (V_n) est bornée.

◊ La suite (V_n) n'a pas de limite.

◊ Si la suite (V_n) converge, sa limite est dans l'intervalle [-2 ; 2].

2- Si $W_n = 2\,U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$, alors :

◊ Les suites (U_n) et (W_n) sont adjacentes.

◊ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

◊ On ne peut pas dire si la suite (V_n) converge ou non.

◊ Pour tout entier naturel n, $U_n \geq 0$

3- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors :

◊ La suite (U_n) est majorée

◊ $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$.

◊ La suite (W_n) n'a pas de limite.

◊ La suite (U_n) tend vers $-\infty$.

4- Si $U_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $W_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}$, alors :

◊ Les suites (U_n) et (W_n) sont adjacentes.

◊ (V_n) est une suite constante·

◊ On ne peut pas dire si la suite (V_n) converge.

◊ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.