

CORRECTION DE L'INTERROGATION SUR LES COMPLEXES

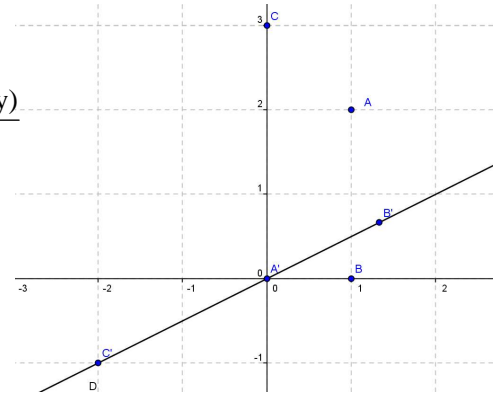
1- $z_A = 0$; $z_B = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$; $z_C = -2 - i$.

2-
$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6} = \frac{(3+4i)(x+iy) + 5(x-iy)}{6} = \frac{3x - 4y + 5x + i(3y + 4x - 5y)}{6}$$

$$= \frac{8x - 4y}{6} + i \frac{4x - 2y}{6}. \text{ D'où } \operatorname{Re}(z') = \frac{4x - 2y}{3}, \text{ et } \operatorname{Im}(z') = \frac{2x - y}{3}.$$

3. $\left(z = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{4x - 2y}{3}, \text{ et } y = \frac{2x - y}{3} \right) \Leftrightarrow \left(y = \frac{1}{2}x \right).$

On constate que A', B' et C' sont trois points de (D).



4. Si on note $z = x + iy$ l'affixe de M, on a vu que l'affixe de M' s'écrit $z' = \frac{4x - 2y}{3} + i \frac{2x - y}{3}$.

On a donc $\operatorname{Im}(z') = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(z')$. On en déduit que M' appartient à la droite (D).

5.a)
$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z} - 6z}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)z + 5\bar{z}}{6(1+4)} = \frac{(-3+6i+4i+8)z + (5-10i)\bar{z}}{6 \times 5} = \frac{(1+2i)z + (1-2i)\bar{z}}{6} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}.$$

On sait que $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \times \operatorname{Im}(z)$. On en déduit que $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{3} + i \frac{2i \times \operatorname{Im}(z)}{3} = \frac{\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z)}{3}$.

C'est un nombre réel.

b) Si $M' \neq M$, on a vu que $\frac{z' - z}{z_A} \in \mathbb{R}^*$. On a donc : $\arg\left(\frac{z' - z}{z_A}\right) = 0 \text{ [}\pi\text{]}$. Or $\arg\left(\frac{z' - z}{z_A}\right) = (\overline{OA}; \overline{MM'}) [2\pi]$,

on a donc : $(\overline{OA}; \overline{MM'}) = 0 \text{ [}\pi\text{]}$, ce qui équivaut à dire que les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

6. a) On a vu à la question 3. que la droite (D) est l'ensemble des points invariants. Si N est sur (D), son image N' par f est donc confondue avec N.

Si N n'est pas sur (D), en notant N' son image par f, on a vu à la question précédente que (OA) et (NN') sont parallèles, et on a vu à la question 4. que N' est sur (D).

On construit donc le point N' à l'intersection de (D) et de la parallèle à (OA) passant par N.

