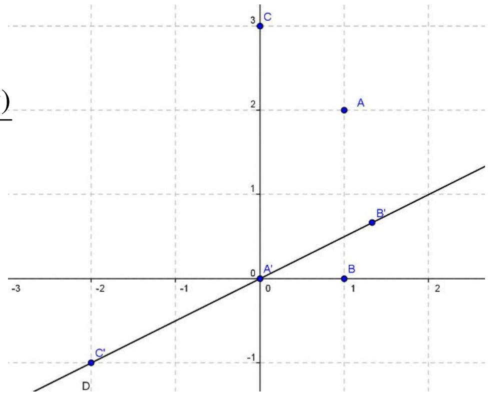
# CORRECTION DE L'INTERROGATION SUR LES COMPLEXES




**1-** $z_{A'} = 0$ ; $z_{B'} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$ ; $z_{C'} = -2 - i$ .

**2-** $z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6} = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x-4y+5x+i(3y+4x-5y)}{6}$

$= \frac{8x-4y}{6} + i\frac{4x-2y}{6}$. D'où $\mathrm{Re}(z') = \frac{4x-2y}{3}$, et $\mathrm{Im}(z') = \frac{2x-y}{3}$.

**3.** $\left(z = \frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{4x-2y}{3}, \text{ et } y = \frac{2x-y}{3}\right) \Leftrightarrow \left(y = \frac{1}{2}x\right)$.

On constate que A', B' et C' sont trois points de (D).

**4.** Si on note z = x + iy l'affixe de M, on a vu que l'affixe de M' s'écrit $z' = \frac{4x-2y}{3} + i\frac{2x-y}{3}$.

On a donc Im(z') = $\frac{1}{2}$Re(z'). On en déduit que M' appartient à la droite (D).

**5.a)** $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{(3+4i)z+5\overline{z}-6z}{6(1+2i)} = \frac{\left((-3+4i)z+5\overline{z}\right)(1-2i)}{6(1+4)} = \frac{(-3+6i+4i+8)z+(5-10i)\overline{z}}{6\times 5} = \frac{(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}}{6} = \frac{z+\overline{z}}{6} + i\frac{z-\overline{z}}{3}$.

On sait que $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z-\overline{z} = 2i\times\mathrm{Im}(z)$. On en déduit que $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{3} + i\frac{2i\times\mathrm{Im}(z)}{3} = \frac{\mathrm{Re}(z)-2\mathrm{Im}(z)}{3}$.

C'est un nombre réel.

**b)** Si M' ≠ M, on a vu que $\frac{z'-z}{z_A} \in \mathbb{R}^*$ . On a donc : $\arg\left(\frac{z'-z}{z_A}\right) = 0\ [\pi]$ .Or $\arg\left(\frac{z'-z}{z_A}\right) = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{MM'}\right)[2\pi]$ ,

on a donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{MM'}\right) = 0\ [\pi]$, ce qui équivaut à dire que les droites (OA) et (MM') sont parallèles.

**6. a)** On a vu à la question **3.** que la droite (D) est l'ensemble des points invariants. Si N est sur (D), son image N' par *f* est donc confondue avec N.

Si N n'est pas sur (D), en notant N' son image par *f*, on a vu à la question précédente que (OA) et (NN') sont parallèles, et on a vu à la question **4.** que N' est sur (D).

On construit donc le point N' à l'intersection de (D) et de la parallèle à (OA) passant par N.