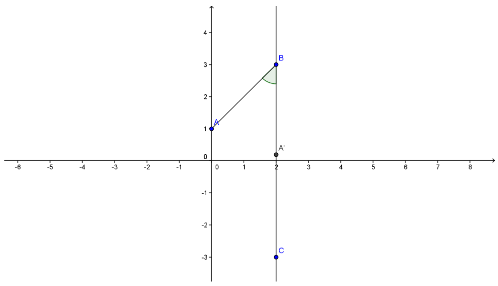
CORRECTION DE L'INTERROGATION SUR LES COMPLEXES N°2

<u>Exercice 1</u> :



1. On a : $z_{A'} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_A - z_B\right)$.

On en déduit : $z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-2-2i\right) + 2 + 3i = 2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)i$.

2. Les affixes des points A', B et C ont la même partie réelle.

On en déduit que ces trois points sur la droite d'équation x = 2.

L'homothétie de centre B qui transforme C en A' a une expression complexe de la forme :

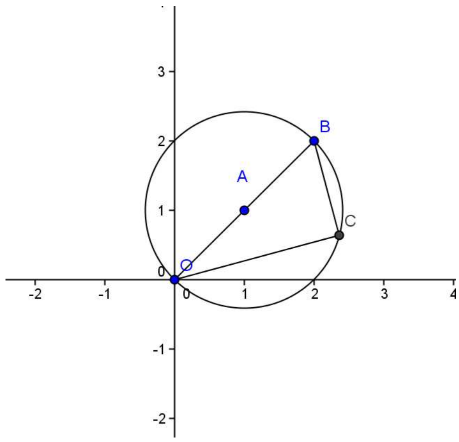
z' = k (z – 2 – 3i) + 2 + 3i   où k est un nombre réel.

Comme C a pour image A', on a : $k = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

L'homothétie de centre B qui transforme C en A' a donc pour expression complexe :

$z' = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (z – 2 – 3i) + 2 + 3i, soit : $z' = \frac{\sqrt{2}}{3} z + \; 2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3} \; + \left(3 - \sqrt{2}\right) i$.

<u>Exercice 2</u> :



1. $\frac{z_O + z_B}{2} = 1 + i = z_A$, donc A est le milieu de [OB].

2. a) On a : $z_C - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_A - z_B\right)$ d'où :

$$z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1-i\right) + 2 + 2i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

b) On a : OA = AB car A est le milieu de [OB], et AB = AC car C est l'image de A par *R* donc ABC est un triangle équilatéral. On a donc : OA = AB = AC, avec A milieu de [OB]. Les points O, B et C sont donc sur le cercle de diamètre [OB]. On en déduit que le triangle OCB est rectangle en C.

<u>Autre méthode :</u>

$$\frac{z_B - z_C}{z_O - z_C} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right)i} = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

. On a donc : $\left(\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = -\frac{\pi}{2}$ [2π].

On a : $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CO}\right)-\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BC}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

compte tenu du fait que CBO est un triangle rectangle direct en C, que les points O, A, B sont alignés dans cet ordre et que le triangle ACB est équilatéral direct.

Autre méthode :

On a : $\frac{z_B}{z_C}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$. D'où $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\ [2\pi]$ (on le note θ).

$\left|1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{2}$ d'où $\theta=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

c) $Re(z_A) = Im(z_A)$, donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)= \arg(z_A) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

$\left(\vec{u};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

3. On a : $\arg(z_C)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

On en déduit que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{Re(z_C)}{|z_C|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3 :

a) L'expression complexe est celle de l'homothétie de rapport 3 et de centre Ω d'affixe ω telle que :

$\omega = 3\omega + \frac{1}{2}-i$ donc $\omega = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$.

b) L'expression s'écrit : $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\sqrt{2}(1+i)=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

C'est donc l'expression complexe de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ de centre Ω d'affixe ω telle que :

$\omega=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\omega+\sqrt{2}(1+i)\Leftrightarrow\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}(1+i)\Leftrightarrow\omega\times e^{i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\omega=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Un calcul direct avec les formes algébriques donne :

$\omega=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}i$