Ex 1

1) Par hypothèse, $AJ = \frac{1}{2} AE = 2$ cm, $AB = 2$cm et $(AB) \perp (AJ)$.
Le repère $(A; B; J)$ est donc <u>orthonormé</u>.

2) $C(1; -1)$; $B(1; 0)$; $D(0; -1)$; $E(0; 2)$ et $G(-2; 0)$; $F(-2; 2)$

3) • $M(x; y) \in (CF) \iff \vec{CM}$ et $\vec{CF}$ sont colinéaires.
Or $\vec{CM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{CF}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 2+1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{CF}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donc $M \in (CF) \iff 3(x-1) + 3(y+1) = 0$
$M \in (CF) \iff 3x + 3y = 0$

Une équation cartésienne de (CF) est donc $\underline{x + y = 0}$.

• De même, on trouve après calcul que (BE) a pour equation cartésienne $\underline{2x + y - 2 = 0}$.

4) $\vec{CF}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, (CF) et (BE) sont donc sécantes.

• $x_H + y_H = 2 + (-2) = 0$ donc $H \in (CF)$
• $2x_H + y_H - 2 = 2 \times 2 - 2 - 2 = 0$ donc $H \in (BE)$

On en déduit que H est le point d'intersection de (CF) et (BE).

5) D'après ce qui précède, il suffit de prouver que $H \in (DG)$, et pour cela que $\vec{HD}$ et $\vec{HG}$ sont colinéaires.

$\vec{HD}\begin{pmatrix} 0-2 \\ -1+2 \end{pmatrix}$ soit $\vec{HD}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{HG}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 0+2 \end{pmatrix}$ soit $\vec{HG}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Condition de colinéarité sur $\vec{HD}$ et $\vec{HG}$</u> :

$$-2 \times 2 - 1 \times (-4) = -4 + 4 = 0.$$

La condition est vérifiée donc $\vec{HD}$ et $\vec{HG}$ sont colinéaires, ce qui prouve l'alignement des points H, D et G.

Ainsi, H est sur (DG), ce qui prouve que les droites (DG), (BE) et (CF) <u>sont concourantes en H</u>.

Ex 2

1)

u	12	6	3	10	5	16	8	4	2	1
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

a) La valeur de p affichée est donc $\underline{9}$.

b) Pour $u = 14$, on obtient $\underline{p = 17}$ et pour $u = 100$, on obtient $\underline{p = 25}$.

2) a) Une solution (langage TI) :

```
: Prompt U
: 0 → P
: While U ≠ 1
: If partEnt (U/2) = U/2
: Then
: (U/2) → U
: Else
: 3U + 1 → U
: End
: P + 1 → P
: End
: Disp P
```

b) on retrouve notamment les valeurs de la question 1.

Rem : Attention : que se passe-t-il si on saisit 0 en entrée ?...

Si $U \neq 0$, la suite u définie par cet algorithme est :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$$

Cette suite est appelée suite de Syracuse. Il semble que, quel que soit son terme initial u_0, u_n vaut 1 à partir d'un certain rang p, appelé "durée de vol". Mais ce résultat n'est toujours pas prouvé à l'heure actuelle !

On l'appelle la <u>Conjecture de Syracuse</u>.