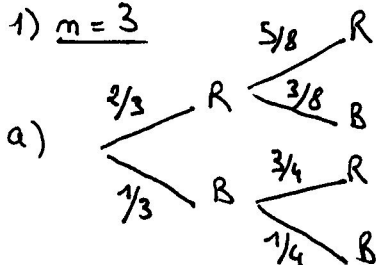


Ex 1

1) $m = 3$



b) Soit A l'événement "Obtenir 2 boules de même couleur" et B l'événement "Obtenir 2 boules de couleurs différents".

$$A = (RR) \cup (BB)$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{24} + \frac{1}{12}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Comme $B = \bar{A}$ alors $P(B) = 1 - P(A)$

$$\text{soit } P(B) = \frac{1}{2}$$

$$c) P(X=1) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=-1) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Loi de X :

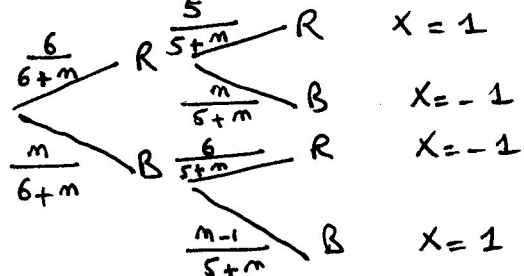
x_i	-1	1
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Le jeu est donc équitable.

2) $m \geq 2$: il y a m boules blanches, 3 boules rouges, et $m+5$ boules.

arbre :



$$a) P(X=1) = \frac{6}{6+m} \times \frac{5}{5+m} + \frac{m}{6+m} \times \frac{m-1}{5+m}$$

$$P(X=1) = \frac{30 + m^2 - m}{(m+6)(m+5)}$$

$$P(X=-1) = \frac{6}{6+m} \times \frac{m}{5+m} + \frac{m}{6+m} \times \frac{6}{5+m}$$

$$P(X=-1) = \frac{12m}{(m+6)(m+5)}$$

b) Loi de X :

x_i	1	-1
P_i	$\frac{30+m^2-m}{(m+6)(m+5)}$	$\frac{12m}{(m+6)(m+5)}$

$$E(X) = \frac{30 + m^2 - m - 12m}{(m+6)(m+5)}$$

$$\text{soit } E(X) = \frac{m^2 - 13m + 30}{(m+6)(m+5)}$$

$m^2 - 13m + 30$ est un trinôme du 2nd degré en m :

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 30 = 49$$

Il y a donc 2 racines :

$$m_1 = 3 \text{ et } m_2 = 10.$$

D'où le tableau de signe :

m	$-\infty$	-6	-5	3	10	$+\infty$
$m^2 - 13m + 30$		+	+	+	0	+
$m+6$		-	0	+	+	+
$m+5$		-	-	0	+	+
$(m+6)(m+5)$		+	0	-	0	+
E(X)		+	-	+	0	+

On ici m est un entier et $m \geq 2$

donc :

m	2	3	10	$+\infty$
E(x)	+	0	-	+

c) Le jeu est équitable pour $m = 3$ ou $m = 10$

d) Le jeu est défavorable au joueur pour $m \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Ex 2

$P(0; b)$ & $R(2; b)$

1) Par construction : $R(a; 1)$ & $N(a; 0)$

$$\vec{PN} ? \quad x_N - x_P = a - 0 = a \quad \text{donc } \vec{PN} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$y_N - y_P = 0 - b = -b$$

$$\vec{RQ} ? \quad x_Q - x_R = 2 - a \quad \text{donc } \vec{RQ} \begin{pmatrix} 2-a \\ b-1 \end{pmatrix}$$

$$y_Q - y_R = b - 1$$

$$\text{D'où } \vec{PN} + \vec{RQ} \begin{pmatrix} a+2-a \\ -b+b-1 \end{pmatrix}$$

soit $\vec{PN} + \vec{RQ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est donc un vecteur fixe car ses coordonnées sont indépendantes de a et b, donc du point M.

$$2) \vec{PR} \begin{pmatrix} a-0 \\ 1-b \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{PR} \begin{pmatrix} a \\ 1-b \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{NQ} \begin{pmatrix} 2-a \\ b-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{NQ} \begin{pmatrix} 2-a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{PR} \text{ et } \vec{NQ} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow ab - (1-b)(2-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - (2-a-2b+ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - 2 + a + 2b - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a + 2b = 2}$$

$$3) \vec{PN} \text{ et } \vec{RQ} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow a(b-1) + b(2-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - a + 2b - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{a - 2b = 0} \quad (1)$$

$$M \in (OB) \Leftrightarrow \vec{OM} \text{ et } \vec{OB} \text{ colinéaires}$$

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \vec{OB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } M \in (OB) \Leftrightarrow a - 2b = 0$$

Comme on suppose M intérieur au rectangle $OABC$,

$$\text{alors } a - 2b = 0 \Leftrightarrow M \in [OB] \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que

$\vec{PN}$ et $\vec{RQ}$ sont colinéaires si et seulement si $M \in [OB]$.