Maths 1S Devoir 5 (DM) : Corrigé

Ex 1 1) On trace la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^4 - x^2 - 6$. Elle semble couper 2 fois l'axe des abscisses, aux points d'abscisses environ $-1,4$ et $1,4$.
Donc il semble que (E) ait 2 solutions : $-1,4$ et $1,4$

2) On résout $2X^2 - X - 6 = 0$: $\Delta = 49$; on trouve $X_1 = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = 2$.
Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2} ; 2\right\}$

3) Posons $X = x^2$: x est solution de E si et seulement si $2x^4 - x^2 - 6 = 0$,
c'est à dire si et seulement si $\begin{cases} 2X^2 - X - 6 = 0 \\ X = x^2 \end{cases}$ car $X = x^2$ donc $X^2 = x^4$

On en déduit que x est solution de E si et seulement si $x^2 = -\frac{3}{2}$ ou $x^2 = 2$
Mais x^2 est nécessairement positif, donc x solution de E si et seulement si $x^2 = 2$,
c'est à dire $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$: $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$

4) Ceci est cohérent car $\sqrt{2} \simeq 1,414$.

5) Posons $X = x^2$: $3x^4 - 33x^2 + 72 = 0 \iff 3X^2 - 33X + 72 = 0$

On résout $3X^2 - 3X + 72 = 0$: $\Delta = 225$ et on trouve $X_1 = 3$ et $X_2 = 8$

Donc $3x^4 - 33x^2 + 72 = 0 \iff X = 3$ ou $X = 8$
$\iff x^2 = 3$ ou $x^2 = 8$
$\iff x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{3} ; -2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2} ; \sqrt{3}\}$.

Ex 2 1) Si $m = 1$, alors (E) devient : $-4x + 1 - 6 = 0$
c'est à dire $-4x - 5 = 0$
d'où $x = -5/4$ et $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

2)a) 1 est solution de (E) si et seulement si $(m-1) \times 1^2 - 4m \times 1 + m - 6 = 0$

c'est à dire
$(m-1) - 4m + m - 6 = 0$
$m - 1 - 4m + m - 6 = 0$
$-2m - 7 = 0$
$m = -\frac{7}{2}$

Donc 1 est solution de (E) si et seulement si $m = -\frac{7}{2}$

b) (E) a une solution lorsque son discriminant Δ_m vaut 0.
$\Delta_m = 0 \iff (-4m)^2 - 4 \times (m-1) \times (m-6) = 0$
$\Delta_m = 0 \iff \underbrace{12m^2 + 28m - 24 = 0}_{\text{équation de degré 2}}$: $\Delta = 1936$; $m_1 = -3$ et $m_2 = \frac{2}{3}$

Donc $\Delta_m = 0 \iff m = -3$ ou $m = \frac{2}{3}$.

c) (E) n'a pas de racine réelle lorsque $\Delta_m < 0$

Or $\Delta_m < 0 \iff 12m^2 + 28m - 24 < 0$ $\quad a = 12 > 0$

Tableau de signes :

m	$-\infty$		-3		$2/3$		$+\infty$
Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\Delta_m < 0 \iff \underline{-3 < m < \frac{2}{3}}$

d) $(m-1)x^2 - 4mx + m - 6 < 0$ pour tout x lorsque $\Delta_m < 0$ <u>et</u> $m - 1 < 0$

donc lorsque $-3 < m < \frac{2}{3}$ et $m < 1$

c'est à dire lorsque $\underline{-3 < m < \frac{2}{3}}$.

<u>Ex 3</u> 1). $Me = 420$ hbts : au moins 50% des communes ont moins de 420 habitants et au moins 50% des communes ont plus de 420 habitants.

. $Q_3 = 1\,041$ hbts : au moins 75% des communes de France ont au plus 1 041 habitants.

2) On constate que la moyenne est environ 4 fois supérieure à la médiane.

<u>Explication</u> : Un <u>très grand nombre de communes sont très peu peuplées</u> (voir la valeur de Q_3 !)

(en fait, $1/4$ des communes ont au plus 191 habitants ...),

alors que quelques communes sont "ultra peuplées".