CORRECTION DE L'INTERROGATION SUR LE CALCUL INTEGRAL

Exercice 1 :

1. Soient u et v des fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel x de $[a\,;\,b]$ on a : $(uv)'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$.
Compte tenu de la continuité de toutes les fonctions et de la linéarité de l'intégrale, on a :
$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$
On a donc : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$

2. a) Dans l'intégrale I, avec les notations précédentes :

- Si on prend : $v(x) = \sin(x)$ (donc $v'(x) = \cos(x)$) et $u'(x) = e^x$ (donc $u(x) = e^x$), on obtient :

$I = \left[e^x \sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx = -J.$

- Si on prend : $v(x) = e^x$ (donc $v'(x) = e^x$) et $u'(x) = \sin(x)$ (donc $u(x) = -\cos(x)$), on obtient :

$I = \left[-e^x \cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(-\cos(x))\,dx = e^\pi + 1 + J.$

b) D'après la question précédente, on a $I = e^\pi + 1 - I$ d'où $I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$ et $J = -I$.

.

Exercice 2 :

1. Pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, donc pour tout réel x de I, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.
Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0$.
Par linéarité de l'intégrale on a : $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$ d'où : $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

2. a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1. $\int_1^x (2-t)\,dt = \left[2t - \dfrac{t^2}{2}\right]_1^x = 2x - \dfrac{x^2}{2} - 2 + \dfrac{1}{2} = 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}.$

b) Pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, on a : $2 - t - \dfrac{1}{t} = \dfrac{2t - t^2 - 1}{t} = \dfrac{-(t-1)^2}{t} \leq 0.$

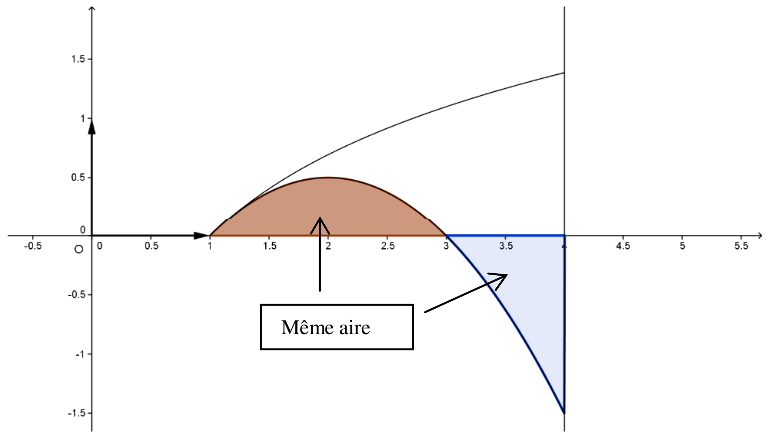
On a donc $2 - t - \leq \dfrac{1}{t}$.

c) La question précédente donne pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $\int_1^x (2-t)\,dt \leq \int_1^x \dfrac{1}{t}dt$, d'où :

$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} \leq \ln(x)$.

3.a) $\int_1^4 \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}\right)dx = \left[-\dfrac{1}{6}x^3 + x^2 - \dfrac{3}{2}x\right]_1^4 = \left(-\dfrac{1}{6}\times 4^3 + 4^2 - \dfrac{3}{2}\times 4\right) - \left(-\dfrac{1}{6} + 1 - \dfrac{3}{2}\right) = 0.$

b) La fonction h (polynôme de degré 2) est positive sur $[1\,;\,3]$ et négative sur $[3\,;\,4]$.
Le résultat précédent traduit que l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est la même que celle de la partie du plan délimitée par la courbe de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.



c) Remarque : On a montré à la question **2.** que sur l'intervalle [1 ; 4] la courbe de *h* est en dessous de la courbe du logarithme népérien. Ainsi, l'aire du domaine cherché est donnée par :

$$\int_1^4 \left(\ln(x) - h(x)\right) dx = \int_1^4 \ln(x)\, dx - \int_1^4 h(x)\, dx = \int_1^4 \ln(x)\, dx.$$

Une intégration par parties donne : $\int_1^4 \ln(x)\, dx = \left[x\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 x \times \frac{1}{x}\, dx = 4\ln(4) - \left[x\right]_1^4 = 4\ln(4) - 3.$

L'aire du domaine ($\mathscr{D}$) est donc d'environ 2,55 unités d'aire.