Devoir à la maison n°8
Corrigé

Exercice 1.

1. Dans le triangle rectangle ABD, $\mathrm{AD}\cos\theta = \mathrm{AB} = 4$ et donc $\mathrm{AD} = \dfrac{4}{\cos\theta}$ (puisque $\theta < \dfrac{\pi}{2}$.)
   De même, $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{4}$ et $\mathrm{BD} = 4\tan\theta$.
   Les temps t_1 et t_2 en heures sont donnés par : $t_1 = \dfrac{\frac{0,004}{\cos\theta}}{30} = \dfrac{0,004}{30\cos\theta}$ et $t_2 = \dfrac{0,007 + 0,004\tan\theta}{60}$.
2. Le lapin aura pu traverser sans encombre si et seulement si $t_1 < t_2$. Or :
   $t_1 < t_2 \iff \dfrac{\frac{0,004}{\cos\theta}}{30} < \dfrac{0,007+0,004\tan\theta}{60} \iff \dfrac{0,008}{\cos\theta} < 0,007 + 0,004\tan\theta$
   $\iff 8 < 7\cos\theta + 4\sin\theta \iff \dfrac{7}{2}\cos\theta + 2\sin\theta - 4 > 0$
   $\iff \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta} > 0 \iff f(\theta) > 0.$
3. Étudions les variations de la fonction f sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   f est dérivable sur cet intervalle en tant que somme de fonctions qui le sont, et
   $$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2\theta} - \frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
   qui est du signe de $2 - 4\sin\theta$.
   Or, sur l'intervalle$\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $2 - 4\sin\theta = 0 \iff \sin\theta = \dfrac{1}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{6}$.
   La fonction f est croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Or $f(0) = \dfrac{7}{2} - 4 = -\dfrac{1}{2} < 0$;
   $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{7}{2} + 2\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2\times\dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{6\sqrt{3}}{3} > 0.$
   En écrivant $f(\theta)$ sous la forme $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$, on voit que $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$.
   f étant continue sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, le tableau de variations indique que f s'annule deux fois et deux fois seulement sur cet intervalle : en $\theta_1 \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right[$ et en $\theta_2 \in \left]\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   A l'aide de la calculatrice, par exemple, on remarque que f est strictement positive si $0,40 \leqslant \theta \leqslant 0,64$ (environ) (soit si vous préférez les degrés, entre 23 et 37 degrés environ.)
   Le lapin est sain et sauf s'il choisit donc sont angle de trajectoire entre 23° et 37°

   Remarque – Si f est définie sur un intervalle I et s'il existe $a \in I$ tel que $f(a) > 0$, alors il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $a \in J$ et pour tout $x \in J$, $f(x) > 0$.

Exercice 2.

1. (a) $\overrightarrow{AB}(0;1;1)$ et $\overrightarrow{BC}(2;-3;1)$.
   Les coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne
   $\begin{cases} 2\times 1 + 1 - 0 - 3 &= 0 \\ 2\times 1 + 2 - 1 - 3 &= 0 \\ 2\times 3 + (-1) - 2 - 3 &= 0 \end{cases}$ donc les points A, B et C appartiennent au plan d'équation

$2x+y-z-3=0$. Comme ces points ne sont pas alignés ils définissent un unique plan. Donc le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y-z-3=0$.

2. $M(x;y;z)$ appartient aux plans (P) et (Q) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z-4 & = & 0 \\ 2x+3y-2z-5 & = & 0 \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z-4 & = & 0 \\ 2x+3y-2z-5 & = & 0 \\ z & = & t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x & = & -2y+t+4 \\ 2(-2y+t+4)+3y-2t-5 & = & 0 \\ z & = & t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -6+t+4 \\ -y+3 & = & 0 \\ z & = & t \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t-2 \\ y & = & 3 \\ z & = & t \quad t\in\mathbb{R} \end{array}\right.$ Donc l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite $(\mathcal{D})$, dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R})$$

3. $M(x;y;z)$ appartient à l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q)
   $\Leftrightarrow M(x;y;z)$ appartient à l'intersection du plan (ABC) et de la droite $(\mathcal{D})$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} 2x+y-z-3 & = & 0 \\ x & = & t-2 \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} 2(t-2)+3-t-3 & = & 0 \\ x & = & t-2 \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} t & = & 4 \\ x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 4 \end{array}\right.$

   Donc l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) est le point $E(2;3;4)$.

4. Par définition, la distance de A la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite valeur possible prise par la distance AM lorsque M décrit $\mathcal{D}$.
   Soit $M\ \in\mathcal{D}$: les coordonnées de M sont de la forme $(-2+t;3;t)$ avec t réel.

$$AM^2=(t-3)^2+(-2)^2+t^2=2t^2-6t+13$$

   Le trinôme du second degré $2t^2-6t+13$ passe par un minimum (puisque $2>0$) atteint en $t=1.5$ et qui vaut $\dfrac{17}{2}$.

   Ainsi, AM^2, et donc AM, est minimale lorsque $t=1.5$ et AM vaut alors $\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

   On conclut que $d(A;\mathcal{D})=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.