Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n - 2$.

1. Comme 3>1 alors $\lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. **Entrée :** saisir une valeur pour A
   Initialisation : n prend la valeur 0
   Traitement : tant que $3^n - 2 \leqslant A$
   n prend la valeur $n+1$
   fintantque
   Sortie : afficher n

3. $u_n > 20$ à partir du rang $n = 3$
   $u_n > 100$ à partir du rang $n = 5$
   $u_n > 10^6$ à partir du rang $n = 13$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n = 2n + 3 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

2. — initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0^2$ donc la propriété est vraie au rang 0.

   — hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

   On a : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

   Or $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ donc $n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ce qui prouve que $u_{n+1} > (n+1)^2$.

   Donc la propriété est vraie au rang n+1.

   — conclusion : la propriété a été initialisée et est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

3. Comme $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ alors par comparaison $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4. a. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4$
   $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9$
   $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16$
   $u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 3 = 25$

   b. On conjecture que $u_n = (n+1)^2$

   c. — initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 = (1+0)^2$ donc la propriété est vraie au rang 0.

   — hérédité : supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

   On a : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

   Donc la propriété est vraie au rang n+1.

   — conclusion : la propriété a été initialisée et est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.