$\frac{18}{20}$

TEST MATHS

Soit (u_n) défini par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

(1) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3

$$u_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$u_0 = 1 \ ; \ u_1 = \frac{1}{2} \ ; \ u_2 = \frac{1}{3} \ ; \ u_3 = \frac{1}{4}$$

(2) Je conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

Soit P_n la propriete : ~~[illegible]~~ ; $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

~~Supposons P_n vrai~~

~~Nous allons demontrer par recurrence P_{n+1} vraie~~

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie

Initialisation

pour $n = 0$; $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$

Donc P_0 est vraie

Heredité

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} \quad \text{(par définition de la suite)}$$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}} \quad \text{(car on suppose } P_k \text{ vrai)}$$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+1}{k+1}+\frac{1}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k+2}{k+1}}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{\cancel{k+1}} \times \frac{\cancel{k+1}}{k+2}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{k+2}$$

P_{k+1} est vraie

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$; P_n est vraie c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{1}{1+n}$