

DEVOIR À LA MAISON N°11*A rendre le lundi 03.05.2010***1. Étude d'un exemple**

Une urne contient 5 boules rouges et 6 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait **simultanément** 5 boules de cette urne.

X est la variable aléatoire qui dénombre, parmi les 5 boules tirées, les boules rouges obtenues.

- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- En déduire que :

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \binom{6}{5-k} = \binom{11}{5}$$

- Déterminer l'espérance de X .

2. Généralisation

a et b désignent des entiers naturels non nuls et $b \leq a$.

Une urne contient b boules rouges et a boules blanches. On extrait simultanément b boules de cette urne et X est la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules rouges qu'il contient.

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- En déduire que si a et b désignent des entiers naturels non nuls tels que $b \leq a$, alors :

$$(1) \quad \sum_{k=0}^b \binom{b}{k} \binom{a}{b-k} = \binom{a+b}{b}$$

- Calcul de l'espérance de X

- Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq a$. Prouver que $k \binom{b}{k} = b \binom{b-1}{k-1}$.

- Prouver que :

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{b-1} \binom{b-1}{k} \binom{a}{b-k-1} = \binom{a+b-1}{b-1}$$

- Prouver que $E(X) = \frac{b^2}{a+b}$.