Tles $S_1 - S_4 - S_5 - S_6$ Mathématiques – DS8 28/04/2014

Exercice 1

On donne les nombres complexes suivants: $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1. Déterminer une forme exponentielle de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

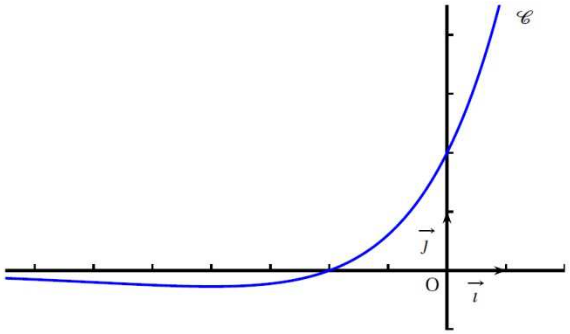
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

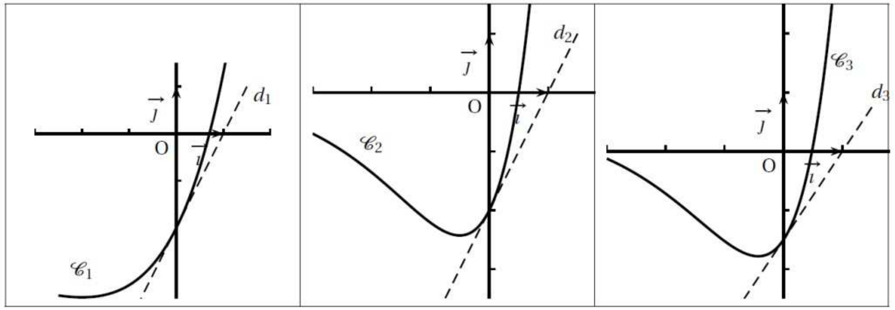
Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.

Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\exp\left(\frac{1}{2}x\right)$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2}(x + 4)\exp\left(\frac{1}{2}x\right)$

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \int_0^1 f(x)dx$

a. Interpréter géométriquement le réel I .

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$

Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

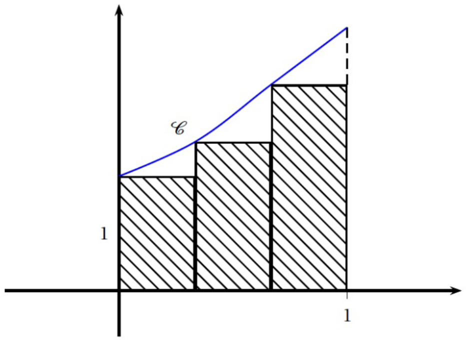
c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. $n \neq 0$ s est un nombre réel.
Entrée :	
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Traitement :	Affecter à s la valeur 0. Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ Fin de boucle
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Que représente s_3 dans l'algorithme ? Justifier.



b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme lorsque n devient grand ?

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
La courbe C_f est représentée en **annexe 1 (à rendre avec la copie)**.

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée $f\,'$ de la fonction f.

c. En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$$

On note Cg la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.
Indication : après l'avoir justifiée, on utilisera la relation suivante :

$$\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

b. Calculer la dérivée $g\,'$ de la fonction g.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. a. Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

c. Tracer sur le graphique de **l'annexe 1 (à rendre avec la copie)** la courbe C_g.

4. On désigne par $\mathcal{D}$ la partie du plan délimitée d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine $\mathcal{D}$.

a. Sur l'annexe 1, hachurer le domaine $\mathcal{D}$.

b. En l'exprimant l'aire $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathcal{A}$.

Nom :
Prénom :
Classe :

Annexe 1
(à rendre avec la copie)