Exercice n°1 4 pts

1. a) On répète huit épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « le stylo présente un défaut » de probabilité 0,1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc elle suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8;0,1)$ (1 pt)

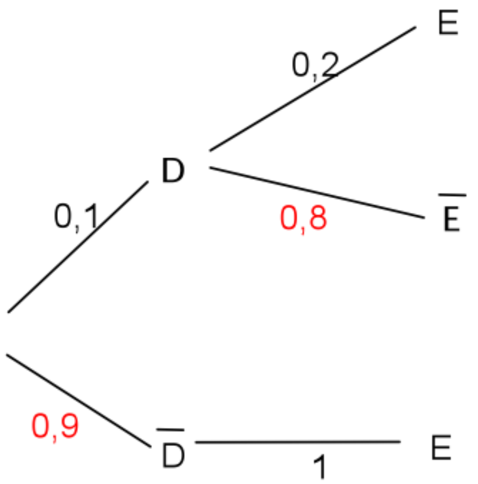
b) Pour tout entier $k \in \{0;1;....;8\}$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ici n=8 et p=0,1.

$$P(A)=P(X=0)=\binom{8}{0}0,1^0\times 0,9^8=1\times 0,9^8\approx \boxed{0,430}$$

$$P(B)=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0,9^8\approx \boxed{0,570}$$ (1,5 pt)

$$P(C)=P(X=2)=\binom{8}{2}\times 0,1^2\times 0,9^6=28\times 0,1^2\times 0,9^6\approx \boxed{0,149}$$

2. a) Arbre pondéré :



(0,5 pt)

Données :
$P(D)=0,1$
$P_D(E)=0,2$
$P_{\overline{D}}(E)=1$
Calculs :
$P(\overline{D})=1-P(D)=0,9$
$P_D(\overline{E})=1-P_D(E)=0,8$

b) D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(E)=P(D\cap E)+P(\overline{D}\cap E)$$

$$P(E)=P(D)\times P_D(E)+P(\overline{D})\times P_{\overline{D}}(E)$$ (0,5 pt)

$$P(E)=0,1\times 0,2+0,9\times 1$$

$$\boxed{P(E)=0,92}$$

c) $P_E(D)=\dfrac{P(D\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0,02}{0,92}\approx \boxed{0,022}$ (à 10^{-3} près) (0,5 pt)

Exercice n°2 5 pts

1. a) T_1 et P_1 ont la même probabilité , p (T_1) = p (P_1) = 0,5.

$p_{T_1}(T_2)=\boxed{0,3}$ et $p_{P_1}(T_2)=1-0,8=\boxed{0,2}$ (0,5 pt)

b) T_1 et P_1 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

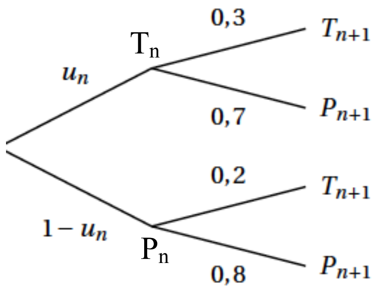
$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2)$

$p(T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2)$

$p(T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2$ (0,75 pt)

$\boxed{p(T_2) = 0,25}$

c)



(0,5 pt)

d) Pour tout entier $n \geq 1$,

T_n et P_n forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1})$

$u_{n+1} = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1})$

$u_{n+1} = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n$ (0,75 pt)

$\boxed{u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2}$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n$

$v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$. (1 pt)

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{5}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}$ et $u_n = v_n + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{5}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}}$ (0,75 pt)

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{10} < 1$ donc par limite d'un produit puis d'une somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}}$ (0,75 pt)

Exercice n°3 2,5 pts

1. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n}\sin\left(2^n\right)$

$-1 \leq \sin\left(2^n\right) \leq 1$

$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ donc d'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (0,75 pt)

2. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2\times 17^n + 4\times(-0,5)^n$

$17 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 17^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2\times 17^n\right) = +\infty$

$-1 < -0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\times(-0,5)^n = 0$

Par limite d'une somme , $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$. (0,75 pt)

3. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{4n^2+3n-2}{-2n+5} = \frac{n^2\left(4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(-2+\frac{5}{n}\right)} = n\times\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{-2+\frac{5}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\frac{4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{-2+\frac{5}{n}n} = \frac{4}{-2} = -2$$ (1 pt)

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par limite d'un produit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

Exercice 4 :

Question de cours : cf. cahier de cours 1. (0,5pt) 2. (0,75 pt)

Partie A

Tableau de suivi des variables pour N=3.

	k	U
Initialisation		0
Boucle 1$^{\text{ère}}$ Itération	0	$3\times 0-2\times 0+3=3$
2$^{\text{nde}}$Itération	1	$3\times 3-2\times 1+3=10$
3$^{\text{ème}}$ Itération Fin de la boucle (car 2=N-1)	2	$3\times 10-2\times 2+3=29$
Sortie		29

Lorsque N=3, l'affichage en sortie est 29. (1 pt)

Partie B :

1) $u_0 = 0$

$u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$

$u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$ (0,5 pt)

a) Soit P_n la propriété « $u_n \geq n$ »

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 0$ donc $u_0 \geq 0$. La propriété P_0 est vraie.
<u>Hérédité</u> : supposons la propriété P_n vraie pour un entier naturel n.
On a : $u_n \geq n$
$\Rightarrow 3u_n \geq 3n$
$\Rightarrow 3u_n - 2n \geq 3n - 2n$
$\Rightarrow 3u_n - 2n \geq n$
$\Rightarrow 3u_n - 2n + 3 \geq n + 3$
$\Rightarrow u_{n+1} \geq n + 3$
$\Rightarrow u_{n+1} \geq n + 1$
La propriété P_n est donc vraie au rang $n+1$
<u>Conclusion</u> : la propriété P_n est vraie au rang 0 et est héréditaire à partir du rang 0, elle est donc vraie pour tout entier naturel n. (1,5 pt)

b) Pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. (0,75 pt)

3) Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$
Donc :
$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$
Or, d'après 2)a), pour tout entier naturel n,
$u_n \geq n$ donc
$u_n - n \geq 0$ d'où
$2(u_n - n) \geq 0$ donc
$2(u_n - n) + 3 \geq 3$ d'où
$u_{n+1} - u_n \geq 0$
La suite (u_n) est croissante. (0,75 pt)

4. $u_n = 3^n + n - 1$

a) D'après 2)b) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc pour tout réel A il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq A$. Il suffit de choisir $A = 10^p$. (0,5 pt)

b) Calculons u_{3p} :
$u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = (3^3)^p + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$ (0,5 pt)
Or $p \in \mathbb{N}^*$ donc $\begin{cases} 27^p \geq 10^p \\ 3p - 1 \geq 0 \end{cases}$ d'où $27^p + 3p - 1 \geq 10^p$ i.e. $u_{3p} \geq 10^p$
Or n_0 est le plus petit entier tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$ donc $n_0 \leq 3p$.

c) Le tableau de valeurs de la calculatrice donne $u_6 = 734$ *et* $u_7 = 2193$ donc $n_0 = 7$ (0,5 pt)

d) On modifie l'algorithme de la partie A :

<u>Entrée</u>
Saisir le nombre entier naturel non nul P.
<u>Traitement</u>
Affecter à U la valeur 0.
Affecter à N la valeur 0.
Tant que U < 10^P
    Affecter à N la valeur N+1
    Affecter à U la valeur 3^N+N-1
FinTantQue
<u>Sortie</u>
Afficher N

(1,25 pt)