

Exercice n°1

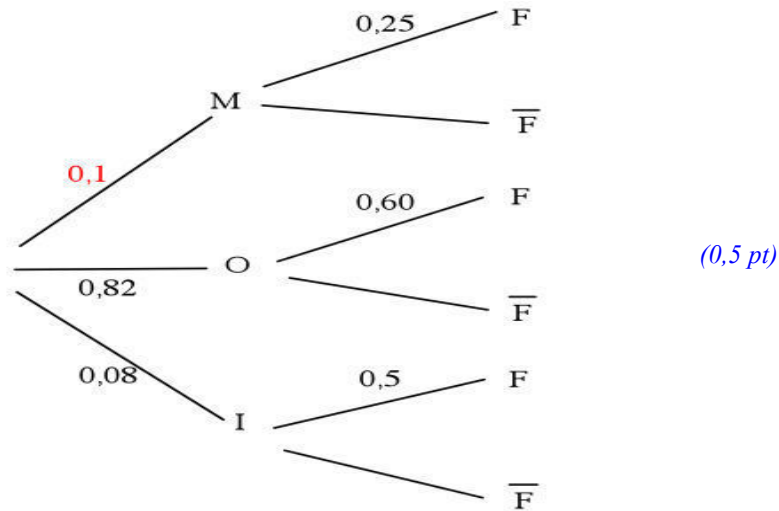
7pts

Partie A

1. D'après les données, on a :

$$P(O) = 0,82 \quad ; \quad P(I) = 0,08 \quad ;$$

$$P_M(F) = 0,25 \quad ; \quad P_O(F) = 0,6 \quad ; \quad P_I(F) = 0,5$$



$$2. \quad a) \quad P(M) = 1 - P(I) - P(O) = 1 - 0,08 - 0,82 = \boxed{0,1} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$b) \quad P(M \cap F) = P(M) \times P_M(F) = 0,1 \times 0,25 = \boxed{0,025} \quad (1 \text{ pt})$$

c) M, O et I forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(M \cap F) + P(O \cap F) + P(I \cap F)$$

$$P(F) = 0,025 + P(O) \times P_O(F) + P(I) \times P_I(F)$$

$$P(F) = 0,025 + 0,82 \times 0,6 + 0,08 \times 0,5$$

$$P(F) = 0,025 + 0,492 + 0,04 = \boxed{0,557} \quad (1,5 \text{ pt})$$

Partie B

1. D'après les données : $P(\bar{B} \cap A) = 0,002$; $P(B \cap \bar{A}) = 0,003$ et $P(B) = 0,04$.

A et \bar{A} forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad \text{donc} \quad 0,04 = P(A \cap B) + 0,003 \quad (1,5 \text{ pt})$$

$$\text{donc} \quad P(A \cap B) = 0,04 - 0,003 = \boxed{0,037}$$

La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

2.

B et \bar{B} forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,037 + 0,002 = \boxed{0,039} \quad (1,5 \text{ pt})$$

La probabilité que l'alarme se déclenche est égale à 0,039.

$$3. \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,037}{0,039} = \boxed{\frac{37}{39}}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

Exercice 2**3,5 pts**

1. $u_0 = 1$ (0,5 pt)
2. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$. (0,5 pt)
- 3.

On rentre l'algorithme suivant dans la calculatrice :

```

Input N
1 → U
For (I, 1, N)
√(3U + 1) → U
End
Disp U

```

On obtient :

N	1	2	3	4	5	6
U	2	2,646	2,9895	3,157	3,236	3,272

La suite (u_n) semble croissante. (0,5 pt)

4. Raisonnons par récurrence. Soit $P(n)$ la proposition « $0 < u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ donc $0 < u_0 < u_1$. $P(0)$ est vraie.Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$.On a : $0 < u_n < u_{n+1}$.

On multiplie chaque membre par 3.

$$0 < 3u_n < 3u_{n+1}.$$

On ajoute 1 à chaque membre.

$$1 < 3u_n + 1 < 3u_{n+1} + 1.$$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc

$$1 < \sqrt{3u_n + 1} < \sqrt{3u_{n+1} + 1} \text{ donc } 0 < u_{n+1} < u_{n+2}. \text{ Donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n < u_{n+1}$.La suite (u_n) est strictement croissante. (2 pts)**Exercice 3****9,5 pts**

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

$$1) \quad a) \quad u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{1,5}{2} = \boxed{\frac{3}{4}} ; \quad u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{9}{10}}. \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$b) \quad u_1 - u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_2 - u_1 = \frac{3}{20} \text{ donc } u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0.$$

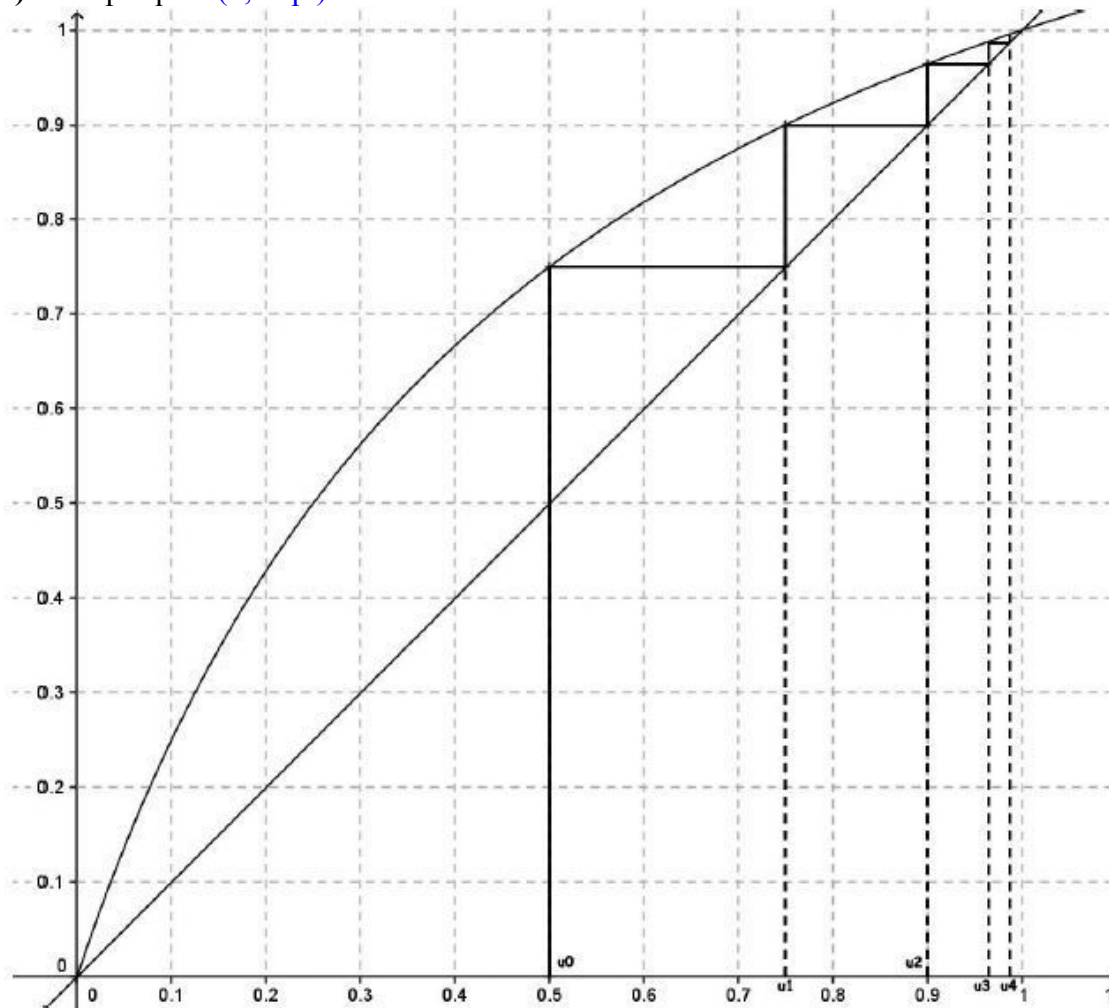
La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$$u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{1,5}{2} = \boxed{\frac{3}{4}} ; \quad u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{9}{10}} \quad (1 \text{ pt})$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{9}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{6}{5} \text{ donc } \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

La suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) Graphique (0,75 pt)



3.

$$f :]-\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{3x}{1+2x}$$

La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, elle est donc dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x \\ v(x) = 1 + 2x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{3}{(1+2x)^2}$$

Pour tout x de $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f		

(1 pt)

4) Soit P_n la propriété « $0 < u_n < 1$ ». Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n .

- Initialisation : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété P_n est donc vraie au rang 0.
- Hérédité : Supposons la propriété P_n vraie pour un entier n positif ou nul.
 $0 < u_n < 1$

La fonction f est strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ donc :

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

donc $0 < u_{n+1} < 1$

- Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n < 1$. (2 pts)

5) Soit un entier naturel n .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

Or, d'après 4), pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n < 1$ donc $\begin{cases} 2u_n > 0 \\ 1 - u_n > 0 \\ 1 + 2u_n > 0 \end{cases}$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante. (1,5 pt)

6) a) Pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \quad \text{or} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \quad \text{donc}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n} \times (1+2u_n)}{\left[1 - \frac{3u_n}{1+2u_n}\right] \times (1+2u_n)} = \frac{3u_n}{1+2u_n - 3u_n} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n \quad (1,25 \text{ pt})$$

Pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 3v_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 3$.

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=3$ donc, pour tout entier naturel n , on a :

$$v_n = v_0 \times 3^n.$$

(0,5 pt)

Or $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ donc, pour tout entier naturel n , $v_n = 3^n$

c) Par définition, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

$$\text{donc } u_n = v_n(1-u_n)$$

$$u_n = v_n - u_n v_n$$

$$u_n + u_n v_n = v_n$$

$$u_n(1+v_n) = v_n$$

or pour tout entier naturel n , $v_n = 3^n$ donc $v_n \neq -1$, d'où

$$u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$$

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$

(1 pt)