

Calculatrice autorisée

Exercice 1: f est la fonction définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = \cos(2x) - x$.

1. a) Démontrer que, pour tout réel x : $-(1+x) \leq f(x) \leq 1-x$
En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f .
 - b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
 - c) Montrer que l'équation (E): $\cos(2x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2. *Approximation de α .*
- a) Quel est le rôle de l'algorithme ci-dessous?

Entrée: Saisir $P > 0$.
 Initialisation: a prend la valeur 0.
 b prend la valeur $\frac{\pi}{2}$.
 Traitement: Tant que $b - a \geq P$
 si $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ alors
 a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
 sinon
 b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
 Fin si
 Fin tant que
 Sortie: Afficher a, b .

- b) Saisir cet algorithme à la calculatrice et le faire fonctionner pour $P = 0,1$ puis $P = 0,01$. Indiquer les résultats obtenus.

Exercice 2:

On définit la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par la relation:

$$g(x) = 2\cos^2(x) + 2\sin(x) - 1$$

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[0; 2\pi]$, $g'(x) = 4\cos(x) (\frac{1}{2} - \sin(x))$.

2. a) Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\frac{1}{2} - \sin(x) > 0$

b) Dresser alors le tableau de signes de $g'(x)$, puis le tableau de variations de g .

Exercice 3: Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\Omega(3; -1; 0)$ et la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer l'ensemble S des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :
 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de S et (D).

Exercice 4 :**A. question de cours**

Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

B. L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3; -2; 2); B(6; 1; 5) \text{ et } C(6; -2; -1)$$

1. a) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
 b) Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
Montrer que (P) est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
 c) Soit (P') le plan orthogonal à la droite (AC) passant par le point A.
Déterminer une équation cartésienne de ce plan (P').
2. a) Soit D le point de coordonnées $(0; 4; -1)$.
Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
 b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD. (*volume tétraèdre* = $\frac{1}{3} \times B \times h$)
 c) Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians.
Montrer que l'aire du triangle BDC est 27.
 d) Soit H le point d'intersection du plan (BDC) avec sa perpendiculaire passant par A. Déduire de ce qui précède la longueur AH.