TS 1-4-5-6	**Contrôle de mathématiques n° 5**	Lundi 20 janvier 2014

Calculatrice autorisée

Exercice 1: f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \cos(2x) - x$.

1. a) Démontrer que, pour tout réel x : $-(1+x) \leq f(x) \leq 1-x$

En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

c) Montrer que l'équation (E) : $\cos(2x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

2. *Approximation de* α.

a) Quel est le rôle de l'algorithme ci-dessous?

```
Entrée:          Saisir P > 0.
Initialisation:  a prend la valeur 0.
                 b prend la valeur π/2.
Traitement:      Tant que b − a ≥ P
                     si f((a + b)/2) > 0 alors
                         a prend la valeur (a + b)/2
                     sinon
                         b prend la valeur (a + b)/2
                     Fin si
                 Fin tant que
Sortie:          Afficher a, b.
```

b) Saisir cet algorithme à la calculatrice et le faire fonctionner pour P = 0,1 puis P = 0, 01. Indiquer les résultats obtenus.

Exercice 2:

On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par la relation:

$$g(x) = 2\cos^2(x) + 2\sin(x) - 1$$

1. Montrer que pour tout x appartenant à $[0;2\pi]$, $g'(x) = 4\cos(x)\left(\frac{1}{2} - \sin(x)\right)$.

2. a) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation $\frac{1}{2} - \sin(x) > 0$

b) Dresser alors le tableau de signes de $g'(x)$, puis le tableau de variations de g.

Exercice 3: Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $\Omega(3 ; -1 ; 0)$ et la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer l'ensemble S des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de S et (D).

Exercice 4 :

A. question de cours

Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

B. L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Dans ce repère, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

A(3 ; -2 ; 2) ; B (6 ; 1 ; 5) et C (6 ; -2; -1)

1. a) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

b) Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
Montrer que (P) est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.

c) Soit (P') le plan orthogonal à la droite (AC) passant par le point A.
Déterminer une équation cartésienne de ce plan (P').

2. a) Soit D le point de coordonnées (0; 4; -1) .
Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD. *(volume tétraèdre* $= \frac{1}{3} \times B \times h$*)*

c) Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians.

Montrer que l'aire du triangle BDC est 27.

d) Soit H le point d'intersection du plan (BDC) avec sa perpendiculaire passant par A. Déduire de ce qui précède la longueur AH.