TS 1-4-5-6 **Contrôle de mathématiques n° 7** Lundi 24 mars 2014

Exercice 1: Résoudre les inéquations suivantes:

1. $e^{1-x} > 3$ 2. $\ln(e^x + 1) > 2$

3. $\ln(3x + 1) < -1$ 4. $\ln(3x^2 - x) < \ln(2x)$

Exercice 2 :

Partie A : Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1) Etudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Montrer l'égalité $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

Partie B : On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par

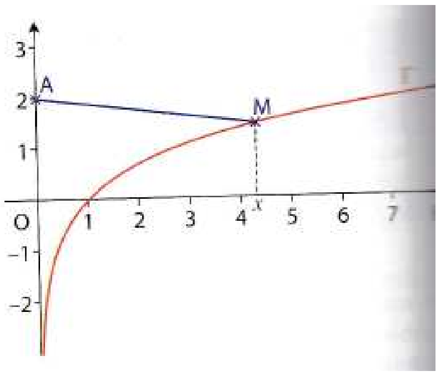
$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2) En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note:

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien);
- A le point de coordonnées (0 ; 2);
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.



1) Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

Exercice 3 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0.$$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = 2\, z_B$.

a) Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.

b) Placer les points A, B et C.

c) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

d) Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$, en déduire la nature du triangle IAC.

e) Le point E est tel que $\overrightarrow{OE} = 2\,\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.

f) Soit D le point tel que $z_D = i\, z_E$. Déterminer l'affixe du point D.

g) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.