

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 9

*Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.*

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,  
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 (5 points)

### Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à  $10^{-4}$  près.

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
  - a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
  - b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
  - c. L'ampoule tirée est sans défaut.  
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.  
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

#### Partie B

1. On rappelle que si  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif  $a$ ,  $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$ .
  - a. Montrer que  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .
  - b. Montrer que si  $T$  suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs  $t$  et  $a$  on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
  - a. Déterminer la valeur exacte du paramètre  $\lambda$  de cette loi.
  - b. Calculer la probabilité  $P(T \geq 5\,000)$ .
  - c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

### Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

### Exercice 2 (3 points)

#### Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z - 2| = 1$ .

1. Justifier que  $\mathcal{C}$  est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit  $a$  un nombre réel. On appelle  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = ax$ .  
Déterminer le nombre de points d'intersection entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  en fonction des valeurs du réel  $a$ .

### Exercice 3 (7 points)

#### Commun à tous les candidats

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

1. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

*Indication : on pourra utiliser que pour tout réel  $x$  différent de 0,  $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .*

On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à 0.

2.

- a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et on note  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que pour tout réel  $x$ ,

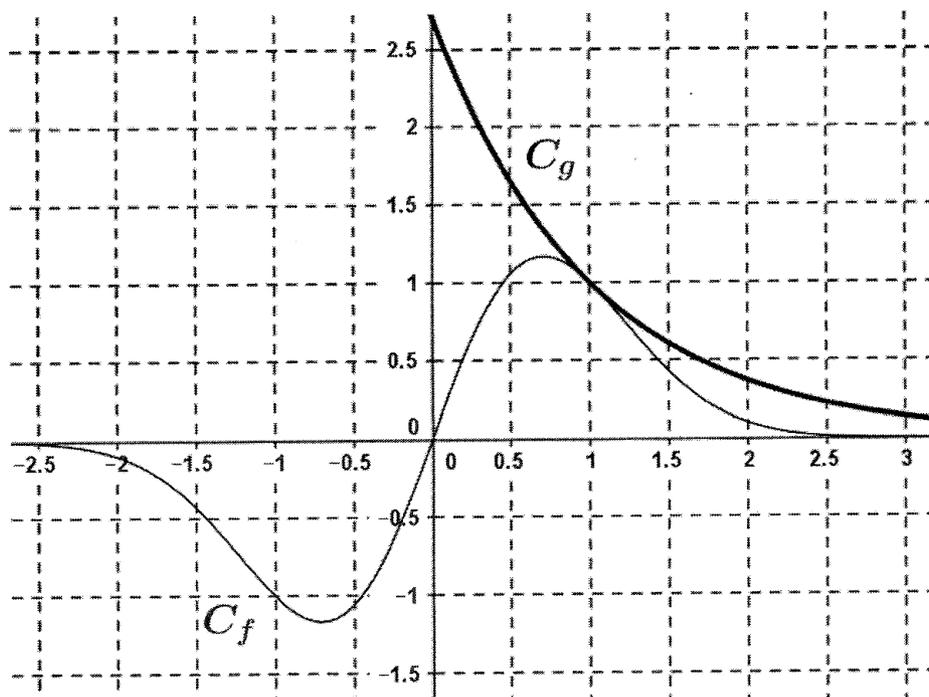
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives  $C_f$  et  $C_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] - \infty ; 0]$ ,  $f(x) < g(x)$ .
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On pose, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ .

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que  $f(x) = g(x)$  équivaut à  $\Phi(x) = 0$ .

- b. On admet que la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Dresser le tableau de variations de la fonction  $\Phi$ . (Les limites en 0 et  $+\infty$  ne sont pas attendues.)
  - c. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) \leq 0$ .
- 4.
- a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
  - b. Montrer que  $C_f$  et  $C_g$  ont un unique point commun, noté A.
  - c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

### Partie C

1. Trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

### Exercice 4 (5 points)

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues  $x$  et  $y$  entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \quad (E).$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières  $(x ; y)$  de l'équation (E) vérifiant  $-5 \leq x \leq 10$  et  $-5 \leq y \leq 10$ .

Variables :	X est un nombre entier Y est un nombre entier
Début :	Pour X variant de $-5$ à $10$ (1)..... (2)..... Alors Afficher X et Y Fin Si Fin Pour Fin Pour
Fin.	

2.
  - a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
  - b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
  - c. Déterminer l'ensemble des couples  $(x ; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que  $-5 \leq x \leq 10$  et  $-5 \leq y \leq 10$ .

## Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0 .$$

On définit la suite  $(A_n)$  de points du plan de coordonnées  $(x_n; y_n)$  vérifiant pour tout  $n$  entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{-13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = \frac{-35}{2}x_n + 8y_n \end{cases} .$$

1. On note  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ -35 & 8 \end{pmatrix}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ .
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1} = MX_n$ .
  - b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n$  en fonction de  $M^n$  et  $X_0$ .
2. On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$  et on admet que la matrice inverse de  $P$ , notée  $P^{-1}$ , est définie par  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ .
  - a. Vérifier que  $P^{-1}MP$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on précisera.
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ , donner  $D^n$  sans justification.
  - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$ .
3. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $x_n$  et de  $y_n$  en fonction de  $n$ .

4. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le point  $A_n$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .