

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Un plan est défini par un point et **deux vecteurs non colinéaires** ; une droite par un point et un **vecteur directeur**.

Définition — vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'il existe des représentants dans un même plan, c'est-à-dire si l'un s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres. Trois vecteurs non coplanaires forment une **base** de l'espace ; tout vecteur s'écrit alors de façon unique $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Propriété — coordonnées

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$; milieu de $[AB] : \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \dots\right)$; en repère orthonormé $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Définition — représentation paramétrique d'une droite

Droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Définition — représentation paramétrique d'un plan

Plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : $M = A + t\vec{u} + s\vec{v}, (t; s) \in \mathbb{R}^2$.

Propriété — positions relatives

- Deux droites : coplanaires (sécantes ou parallèles) ou **non coplanaires**.
- Droite et plan : incluse, strictement parallèle ou sécante en un point.
- Deux plans : confondus, strictement parallèles ou sécants selon une droite.

Méthode — intersection droite / plan

On injecte les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation du plan et on résout en t : une solution (point), aucune (parallèle stricte), une infinité (incluse).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment paramétrer une droite de l'espace ?

Avec un point A et un vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$: $x = x_A + at, y = y_A + bt, z = z_A + ct, t \in \mathbb{R}$.

Comment montrer que trois vecteurs sont coplanaires ?

On montre que l'un est combinaison linéaire des deux autres ; sinon ils forment une base de l'espace.

Quelles sont les positions relatives de deux droites dans l'espace ?

Sécantes, parallèles (strictement ou confondues) ou non coplanaires. Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.

Comment trouver l'intersection d'une droite et d'un plan ?

On remplace x , y , z de la représentation paramétrique de la droite dans l'équation du plan, on résout en t , puis on calcule le point.