

Primitives et équations différentielles

Une **primitive** de f est une fonction F dont la dérivée est f ; les solutions de $y' = ay$ sont les Ce^{ax} .

Définition — primitive

F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$. Toute fonction continue sur I admet des primitives, qui diffèrent d'une constante : $F + C$. Une seule vérifie une condition $F(x_0) = y_0$.

Propriété — primitives usuelles

$f(x)$	$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\cos x$	$\sin x$
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$	e^x	$2\sqrt{x}$	$\sin x$	$-\cos x$

Propriété — formes composées

$$u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1} ; \frac{u'}{u} \rightarrow \ln|u| ; u'e^u \rightarrow e^u ; \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u} ; \frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}.$$

Théorème — équation $y' = ay$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

Théorème — équation $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

Les solutions sont $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. La fonction constante $-\frac{b}{a}$ est la solution particulière.

Exemple

$$y' = 2y - 6 \text{ avec } y(0) = 1 : y = Ce^{2x} + 3 \text{ et } 1 = C + 3 \text{ donne } C = -2 : y(x) = 3 - 2e^{2x}.$$

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce qu'une primitive ?

Une fonction F dont la dérivée est f . Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Comment résoudre $y' = ay + b$?

Les solutions sont $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est déterminée par une condition initiale.

Quelles sont les primitives usuelles ?

$$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}, \frac{1}{x} \rightarrow \ln x, e^x \rightarrow e^x, \frac{1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x}, \cos \rightarrow \sin, \sin \rightarrow -\cos.$$

Comment trouver une primitive de $u'e^u$ ou u'/u ?

$$u'e^u \text{ a pour primitive } e^u, \frac{u'}{u} \text{ a pour primitive } \ln|u|, u'u^n \text{ a pour primitive } \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$