

# Épreuves de Bernoulli et loi binomiale

Répéter  $n$  fois une épreuve de Bernoulli de façon **indépendante** donne une loi binomiale  $\mathcal{B}(n;p)$ .

## Définition — épreuve et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues : succès (probabilité  $p$ ) et échec ( $1-p$ ). Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de  $n$  épreuves identiques et indépendantes.

## Théorème — loi binomiale

Le nombre de succès  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n;p)$  : pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

## Exemple

$X \sim \mathcal{B}(10;0,3)$  :  $P(X = 2) = \binom{10}{2} 0,3^2 0,7^8 \approx 0,233$  ;  
 $P(X \geq 1) = 1 - 0,7^{10} \approx 0,972$  ;  $E(X) = 3$ .

## Méthode — à la calculatrice

$P(X = k)$  : `binompdf(n,p,k)` ;  $P(X \leq k)$  : `binomcdf(n,p,k)`.  
 $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$  ;  $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$ .

## Méthode — déterminer un seuil

Plus petit  $n$  tel que  $P(X \geq 1) \geq 0,95$  :  $1 - (1-p)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln(1-p)}$ .

## Définition — intervalle de fluctuation

Intervalle  $[a;b]$  tel que  $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$ , choisi avec  $P(X < a) \leq 0,025$  et  $P(X > b) \leq 0,025$  : il sert à juger si une fréquence observée est « normale ».

## Questions fréquentes sur ce chapitre

### Quand utiliser la loi binomiale ?

Quand on répète  $n$  fois, de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli de probabilité de succès  $p$ , et qu'on compte le nombre de succès.

### Comment calculer $P(X = k)$ pour une loi binomiale ?

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

## Quelle est l'espérance de la loi binomiale ?

$$E(X) = np, V(X) = np(1-p), \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

## Comment calculer $P(X \geq 1)$ ?

Avec l'événement contraire :  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n$ .