

# Fonction logarithme népérien

$\ln$  est la fonction **réciroque** de  $\exp$  : elle transforme les produits en sommes.

## Définition — logarithme népérien

Pour  $x > 0$ ,  $\ln x$  est l'unique réel  $y$  tel que  $e^y = x$ . Ainsi  $\ln(e^x) = x$  pour tout  $x$  et  $e^{\ln x} = x$  pour  $x > 0$  ;  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$ .

## Propriétés algébriques

Pour  $a, b > 0$  et  $n$  entier :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \ln(a^n) = n \ln a \quad \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$$

## Théorème — dérivée et variations

$\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  avec  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$  :  $\ln$  est **strictement croissante**, concave.  $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$  ;  $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ .

## Propriété — limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

## Méthode — résoudre avec $\ln$

$$3^n \geq 1000 \Leftrightarrow n \ln 3 \geq \ln 1000 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 1000}{\ln 3} \approx 6,29, \text{ donc } n \geq 7. \quad e^{2x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{2}.$$

$$0,8^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \quad (\text{attention : } \ln 0,8 < 0 \text{ renverse l'inégalité}).$$

## À retenir

Les courbes de  $\exp$  et  $\ln$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .

## Questions fréquentes sur ce chapitre

### Qu'est-ce que le logarithme népérien ?

La fonction réciproque de l'exponentielle :  $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$  pour  $x > 0$ . On a  $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$  et  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .

### Quelles sont les propriétés du logarithme ?

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^n = n \ln a, \quad \ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$$

### Comment résoudre une inéquation avec $\ln$ ?

On isole le logarithme puis on applique l'exponentielle (croissante) :  $\ln x \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$ .

Ne pas oublier la condition  $x > 0$ .

### Comment résoudre $q^n \leq a$ ?

On applique  $\ln$  :  $n \ln q \leq \ln a$ , puis on divise par  $\ln q$  en changeant le sens si  $0 < q < 1$  (car  $\ln q < 0$ ).