

Limites de fonctions et asymptotes

Une **asymptote** traduit graphiquement une limite ; les **croissances comparées** lèvent les indéterminations avec e^x et $\ln x$.

Définition — asymptotes

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale**. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = a$ est **asymptote verticale**.

Propriété — limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Théorème — croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0.$$

L'exponentielle l'emporte sur les puissances, qui l'emportent sur le logarithme.

Théorème — comparaison et composition

Théorèmes de comparaison et des gendarmes comme pour les suites. Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(u(x)) = \ell$.

Méthode — lever une forme indéterminée

Polynômes et fractions rationnelles en l'infini : factoriser par le terme de plus haut

degré. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2.$

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelles sont les formes indéterminées ?

$+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. On les lève en factorisant par le terme dominant, en utilisant les croissances comparées ou une quantité conjuguée.

Comment trouver une asymptote horizontale ?

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe.

Comment trouver une asymptote verticale ?

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = a$ est asymptote verticale.

Que sont les croissances comparées ?

En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance : $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ et $x^n e^{-x} \rightarrow 0$; le logarithme est dominé par les puissances : $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$.