

Calcul intégral

L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est une **aire algébrique** ; elle se calcule avec une primitive : $F(b) - F(a)$.

Définition — intégrale

Pour f continue et positive sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$. Pour f de signe quelconque, c'est une aire **algébrique** (comptée négativement sous l'axe).

Théorème fondamental

Si F est une primitive de f continue sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

La fonction $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Propriétés

- Linéarité : $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- Chasles : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$; $\int_a^b f = - \int_b^a f$.
- Positivité : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ ($a \leq b$) alors $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Définition — valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Théorème — intégration par parties

Pour u, v dérivables à dérivées continues :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Exemple

$$\int_0^1 x e^x dx \text{ avec } u' = e^x, v = x : [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

Méthode — aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur $[a; b]$, l'aire entre les courbes vaut $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Questions fréquentes sur ce chapitre**Que représente une intégrale ?**

Pour f continue et positive, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire (en unités d'aire) entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Comment calculer une intégrale ?

Avec une primitive F : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Qu'est-ce que l'intégration par parties ?

$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$. Elle sert par exemple pour $\int x e^x dx$ ou $\int \ln x dx$.

Comment calculer la valeur moyenne d'une fonction ?

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$