

Dénombrement

Compter des **listes** (ordre, répétitions) ou des **parties** (sans ordre) : n^k , $n!$, $\binom{n}{k}$.

Principes de base

Additif : si $A \cap B = \emptyset$, $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B$. **Multiplicatif** : $\text{card}(A \times B) = \text{card} A \times \text{card} B$. Nombre de k -uplets d'un ensemble à n éléments : n^k (ordre, répétitions autorisées).

Définition — permutations, arrangements

Nombre de façons d'ordonner n éléments :

$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$ ($0! = 1$). Nombre de k -uplets d'éléments **distincts** (arrangements) : $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Définition — combinaisons

Nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments (sans ordre, sans répétition) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Propriétés

Symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; **triangle de Pascal**

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} ; \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

(nombre de parties d'un ensemble à n éléments).

Exemple

Nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 : $\binom{32}{5} = 201\,376$. Nombre de podiums (ordre) parmi 10 coureurs : $10 \times 9 \times 8 = 720$. Nombre de codes à 4 chiffres : 10^4 .

Méthode — choisir le bon outil

Ordre compte et répétition possible : n^k . Ordre compte sans répétition : $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ordre ne compte pas : $\binom{n}{k}$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre combinaison et arrangement ?

Un arrangement tient compte de l'ordre ($\frac{n!}{(n-k)!}$ façons), une combinaison non ($\binom{n}{k}$ façons).

Comment calculer $\binom{n}{k}$?

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ou avec le triangle de Pascal :
 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Combien y a-t-il de façons de ranger n objets ?

$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$ permutations. Par exemple $5! = 120$.

Combien de parties possède un ensemble à n éléments ?

2^n , car chaque élément est ou non dans la partie. C'est aussi $\sum_k \binom{n}{k}$.