

Polynômes et fractions rationnelles

Un polynôme de degré n a **au plus n racines** ; dans $\mathbb{C}$ il en a exactement n comptées avec multiplicité.

Définition — degré, division euclidienne

$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$, $\deg(P+Q) \leq \max$. Pour $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) avec $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$. a est racine de P ssi $(X-a)$ divise P .

Définition — multiplicité

a est racine d'ordre m si $(X-a)^m | P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$. Caractérisation : $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$. Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines comptées avec multiplicité ; s'il en a plus, il est nul.

Théorème — d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Conséquence : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est **scindé** : $P = \lambda \prod (X-a_k)^{m_k}$. Dans $\mathbb{R}[X]$, les irréductibles sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant négatif ; les racines complexes non réelles d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées.

Théorème — relations coefficients-racines

Si $P = a_n X^n + \dots + a_0$ est scindé de racines $x_1, \dots, x_n$:
 $\sum x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ (fonctions symétriques élémentaires).

Définition — PGCD, Bézout

$\text{PGCD}(A, B)$ unitaire obtenu par l'algorithme d'Euclide ; A et B sont premiers entre eux ssi il existe U, V avec $AU + BV = 1$ (Bézout). Lemme de Gauss.

Théorème — décomposition en éléments simples

Toute fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme (partie entière, obtenue par division euclidienne) et d'éléments simples. Dans $\mathbb{C}(X)$: $\frac{\alpha}{(X-a)^k}$. Dans $\mathbb{R}(X)$ s'ajoutent les $\frac{\beta X + \gamma}{(X^2 + pX + q)^k}$. Coefficient d'un pôle simple a : $\frac{A(a)}{B'(a)}$.

Exemple

$$\frac{1}{X(X-1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} ; \frac{X}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème de d'Alembert-Gauss ?

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$; il est donc scindé sur $\mathbb{C}$.

Comment déterminer la multiplicité d'une racine ?

α est racine d'ordre m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Comment décomposer une fraction rationnelle en éléments simples ?

Partie entière par division euclidienne, puis pour chaque pôle des termes $\frac{\alpha}{(X-\alpha)^k}$; pour un pôle simple, $\alpha = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

Les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif.