

Nombres complexes

Le passage entre forme **algébrique** $a+ib$ et forme **exponentielle** $re^{i\theta}$ est l'outil central : la première pour additionner, la seconde pour multiplier.

Définition — forme algébrique, conjugué, module

$z = a+ib$ avec $i^2 = -1$; $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$. Conjugué $\bar{z} = a-ib$; module $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$, $|zz'| = |z||z'|$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, inégalité triangulaire $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Définition — argument, forme exponentielle

Pour $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z \in [2\pi]$, où $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
 $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$, $\arg \frac{z'}{z} = \arg z' - \arg z$, $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Théorème — Moivre et Euler

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Technique de l'angle moitié : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$.

Théorème — racines n -ièmes

Les racines n -ièmes de l'unité sont les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$; leur somme est nulle ($n \geq 2$). Les racines n -ièmes de $re^{i\theta}$ sont les $\sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$.

Théorème — équation du second degré dans $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) : $\Delta = b^2 - 4ac$, δ une racine carrée complexe de Δ ; solutions $\frac{-b \pm \delta}{2a}$. Il y a toujours deux racines (éventuellement confondues). Somme $-\frac{b}{a}$, produit $\frac{c}{a}$.

Propriété — géométrie

Affixe $\vec{AB} = z_B - z_A$; $AB = |z_B - z_A|$; $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. A, B, C alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$. $z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$) est une similitude directe : rotation si $|a| = 1$, homothétie si $a \in \mathbb{R}^*$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment trouver les racines n -ièmes d'un nombre complexe ?

On écrit $z = re^{i\theta}$; les n racines sont $\sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ pour $k = 0, \dots, n-1$. Elles forment un polygone régulier.

Comment linéariser $\cos^n x$?

Avec les formules d'Euler : on écrit $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, on développe par le binôme et on regroupe les termes conjugués.

Comment calculer une somme de cosinus avec les complexes ?

On prend la partie réelle d'une somme géométrique $\sum e^{ik\theta}$, puis on factorise par l'angle moitié.

Comment interpréter géométriquement $z \mapsto az + b$?

C'est une similitude directe : rotation d'angle $\arg a$ composée avec une homothétie de rapport $|a|$ et une translation. Si $|a| = 1$ c'est un déplacement.