

Fonctions usuelles

Les fonctions **circulaires réciproques** et **hyperboliques** complètent le catalogue du lycée ; leurs dérivées sont à connaître par cœur.

Définition — puissances réelles

Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Croissances comparées : $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$ en $+\infty$ ($\alpha > 0$).

Définition — arcsin, arccos, arctan

$\arcsin: [-1;1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, impaire, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\arccos: [-1;1] \rightarrow [0;\pi]$,
 $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, impaire,
 $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$ selon le signe de x .

À retenir

$\sin(\arcsin x) = x$ toujours, mais $\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
 $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Définition — fonctions hyperboliques

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (paire, convexe), $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (impaire, croissante), $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (à valeurs dans $] -1; 1[$). $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$. Identité :
 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Formules trigonométriques à connaître

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$,
 $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin 2a = 2\sin a \cos a$, $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$,
 $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$, $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la dérivée de arctan ?

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$; $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1; 1[$.

Pourquoi arcsin(sin x) n'est pas toujours égal à x ?

Parce que $\arcsin$ est la réciproque de $\sin$ restreint à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: l'égalité $\arcsin(\sin x) = x$ n'est vraie que sur cet intervalle.

Que valent ch, sh et th ?

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \text{ avec } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Comment définir x^α pour α réel ?

Pour $x > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$; c'est la seule façon cohérente de donner un sens à $2^{\sqrt{2}}$ par exemple.