

Équations différentielles linéaires

Solution générale = solution de l'équation homogène + une solution particulière.

Théorème — premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$

a, b continues sur I , A primitive de a . Solutions de l'équation homogène :

$y = Ce^{-A(x)}$. Solution particulière par **variation de la constante** : $y = C(x)e^{-A(x)}$ avec $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$. Le problème de Cauchy $y(x_0) = y_0$ a une unique solution sur I .

Théorème — second ordre $y'' + ay' + by = 0$ (coefficients constants)

Équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, discriminant Δ :

- $\Delta > 0$, racines $r_1 \neq r_2$: $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$;
- $\Delta = 0$, racine double r : $y = (\lambda x + \mu)e^{rx}$;
- $\Delta < 0$, racines $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$.

Le problème de Cauchy ($y(x_0), y'(x_0)$ donnés) a une unique solution.

Méthode — second membre $P(x)e^{\lambda x}$

On cherche une solution particulière de la forme $Q(x)e^{\lambda x}$ avec $\deg Q = \deg P$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, $\deg Q = \deg P + 1$ si racine simple, $+2$ si racine double. Second membre $\cos$ ou $\sin$: passer par le complexe $e^{i\omega x}$ et prendre partie réelle ou imaginaire. **Principe de superposition** pour une somme de seconds membres.

Exemple

$y'' + y = \cos x$: i est racine de $r^2 + 1$, on cherche $z = Ae^{ix}$ pour $z'' + z = e^{ix}$: $A = \frac{1}{2i}$, d'où $y_p = \operatorname{Re}\left(\frac{x}{2i}e^{ix}\right) = \frac{x}{2}\sin x$. Solution générale : $\lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x}{2}\sin x$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment résoudre $y' + a(x)y = b(x)$?

Solution homogène $Ce^{-A(x)}$ avec A primitive de a , puis variation de la constante : $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$.

Comment résoudre $y'' + ay' + by = 0$?

Avec l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$: deux racines réelles donnent $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, une racine double $(\lambda x + \mu)e^{rx}$, deux racines complexes $e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$.

Comment trouver une solution particulière avec un second membre en $e^{\lambda x}$?

On cherche $Q(x)e^{\lambda x}$ avec $\deg Q$ augmenté de 1 ou 2 si λ est racine simple ou double de l'équation caractéristique.

Qu'est-ce que le principe de superposition ?

Si y_1 est solution pour le second membre b_1 et y_2 pour b_2 , alors $y_1 + y_2$ est solution pour $b_1 + b_2$.