

# Développements limités

Un DL remplace localement une fonction par un **polynôme** : c'est l'outil universel pour les limites et les équivalents.

## Définition — développement limité

$f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en 0 s'il existe un polynôme  $P$  de degré  $\leq n$  tel que  $f(x) = P(x) + o(x^n)$ . Il est unique ; sa partie régulière  $P$  est paire (resp. impaire) si  $f$  l'est. Un DL d'ordre 1 équivaut à la dérivabilité.

## Propriété — DL usuels en 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^3) \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^3) \\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

## Propriété — opérations

Somme et produit (on tronque à l'ordre voulu) ; quotient (multiplier par le DL de  $\frac{1}{1+u}$ ) ; **composition**  $f(u(x))$  quand  $u(x) \rightarrow 0$  ; **intégration** terme à terme (avec la constante  $f(0)$ ) ; dérivation possible si  $f$  est  $\mathcal{C}^n$ .

## Méthode — applications

- Limite d'une forme indéterminée : développer numérateur et dénominateur au même ordre.
- Équivalent : le premier terme non nul du DL.
- Position par rapport à la tangente : signe du premier terme non nul après l'ordre 1.
- Asymptote en  $\pm\infty$  : DL en  $\frac{1}{x}$  de  $\frac{f(x)}{x}$ .

## Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{car } e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

## Questions fréquentes sur ce chapitre

### Comment composer deux développements limités ?

On remplace  $x$  par le DL de  $u(x)$  dans celui de  $f$ , à condition que  $u(x) \rightarrow 0$ , et on tronque à l'ordre voulu.

## Comment calculer le DL de $\tan x$ ?

En divisant les DL de  $\sin$  et  $\cos$ , ou par intégration de  $1 + \tan^2$  :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

## À quel ordre faut-il développer pour calculer une limite ?

Jusqu'à obtenir un terme non nul au numérateur et au dénominateur après simplification ; si tout s'annule, on augmente l'ordre.

## Comment trouver une asymptote oblique avec un DL ?

On pose  $h = \frac{1}{x}$  et on développe  $\frac{f(x)}{x}$  ou  $f(x)$  en  $h$  :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  donne l'asymptote  $y = ax + b$  et la position selon le signe de  $c$ .