

Dérivation, Rolle, accroissements finis, Taylor

Rolle $\Rightarrow$ accroissements finis $\Rightarrow$ Taylor : une chaîne de théorèmes qui relie les valeurs d'une fonction à ses dérivées.

Définition — dérivabilité

f dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie $f'(a)$, i.e. $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.
 Dérivable $\Rightarrow$ continue (réciproque fautive : $|x|$ en 0). Formules : $(uv)' = u'v + uv'$,
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Théorème — Rolle

Si f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème — accroissements finis

Égalité : f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$: $\exists c \in]a; b[$, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
Inégalité : si $|f'| \leq M$ sur $]a; b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ (f est M -lipschitzienne).

Propriété — conséquences

$f' = 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow f$ constante ; $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ croissante ; $f' > 0$ (sauf en des points isolés) $\Rightarrow f$ strictement croissante. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue en a et $f'(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Définition — classe $\mathcal{C}^n$, Leibniz

f est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f^{(n)}$ existe et est continue. Formule de Leibniz :
 $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Formules de Taylor

Pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$:

- **Reste intégral** : $f(x) = P_n(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.
- **Taylor-Lagrange** (inégalité) : $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup |f^{(n+1)}|$.
- **Taylor-Young** (f de classe $\mathcal{C}^n$) : $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre Taylor-Lagrange et Taylor-Young ?

Taylor-Young est local ($o((x-a)^n)$), utile pour les DL et les limites. Taylor-Lagrange est global : il majore l'erreur sur tout un intervalle avec $\sup |f^{(n+1)}|$.

Que dit le théorème de Rolle ?

Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Comment utiliser l'inégalité des accroissements finis ?

Si $|f'| \leq M$ sur un intervalle, alors $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$; cela sert pour les suites récurrentes contractantes et pour prouver qu'une fonction est lipschitzienne.

Qu'est-ce que la formule de Leibniz ?

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, l'analogue du binôme pour la dérivée n -ième d'un produit.