

Probabilités : univers dénombrables et variables discrètes

Avec un univers infini, les probabilités deviennent des **sommes de séries** ; la **fonction génératrice** code toute la loi d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition — espace probabilisé

Une **tribu** $\mathcal{A}$ sur Ω contient Ω , est stable par complémentaire et par réunion dénombrable. Une probabilité P vérifie $P(\Omega) = 1$ et la **σ -additivité** :

$P\left(\bigcup A_n\right) = \sum P(A_n)$ pour des A_n deux à deux disjoints. **Continuité monotone** : si $A_n \uparrow$, $P(A_n) \rightarrow P\left(\bigcup A_n\right)$; si $A_n \downarrow$, $P(A_n) \rightarrow P\left(\bigcap A_n\right)$. Sous-additivité $P\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum P(A_n)$. Un événement de probabilité nulle est **négligeable** ; « presque sûr » = probabilité 1.

Définition — variable aléatoire discrète

$X: \Omega \rightarrow E$ avec $X(\Omega)$ fini ou dénombrable et $\{X = x\} \in \mathcal{A}$. Loi : $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, de somme 1. Couple, lois conjointe et marginales, loi conditionnelle ; indépendance $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$; lemme des coalitions.

Propriété — lois usuelles

Géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$ (rang du premier succès) : $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $E = \frac{1}{p}$, $V = \frac{1-p}{p^2}$, seule loi **sans mémoire** : $P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$. **Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$: $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $E = V = \lambda$, limite de $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ (événements rares) ; somme de Poisson indépendantes : $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Définition — espérance, variance

$E(X) = \sum xP(X = x)$ si la série converge absolument. Théorème de transfert $E(g(X)) = \sum g(x)P(X = x)$. Linéarité, positivité, croissance ; $|E(X)| \leq E(|X|)$. Si X, Y indépendantes et d'espérance finie : $E(XY) = E(X)E(Y)$. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$; Cauchy-Schwarz $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

Définition — fonction génératrice

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = E(t^X) = \sum P(X = n)t^n$, rayon ≥ 1 , $G_X(1) = 1$. Elle **caractérise** la loi ; $E(X) = G'_X(1)$ (existe ssi G_X dérivable en 1) et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. Si X, Y indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Bernoulli : $1 - p + pt$; binomiale : $(1 - p + pt)^n$; géométrique : $\frac{pt}{1 - (1-p)t}$; Poisson : $e^{\lambda(t-1)}$.

Inégalités et loi faible des grands nombres

Markov : $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$. Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$. Pour (X_n) indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 , avec

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} :$$

$$\forall \epsilon > 0, P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0.$$

Questions fréquentes sur ce chapitre

À quoi sert la fonction génératrice ?

$G_X(t) = E(t^X)$ caractérise la loi de X , donne $E(X) = G'_X(1)$, et $G_{X+Y} = G_X G_Y$ pour des variables indépendantes : idéal pour les sommes.

Pourquoi la loi géométrique est-elle sans mémoire ?

Parce que $P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$: le passé n'influence pas le temps d'attente restant. C'est la seule loi sur $\mathbb{N}^*$ ayant cette propriété.

Qu'est-ce que la loi faible des grands nombres ?

Pour des variables indépendantes de même loi, la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance : $P(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) \rightarrow 0$.

Quand la loi de Poisson approche-t-elle la loi binomiale ?

Quand n est grand et p petit avec $np = \lambda$ fixé : $\mathcal{B}(n, \lambda/n) \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (loi des événements rares).