

Intégration sur un intervalle quelconque et intégrales à paramètre

Le théorème de **convergence dominée** et ses corollaires (continuité, dérivation sous l'intégrale) sont les outils centraux du programme d'analyse de MP.

Définition — intégrale généralisée

Pour f continue par morceaux sur $[a, b[$: $\int_a^b f$ converge si $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ existe.

Convergence absolue ($\int |f| < \infty$, f dite intégrable) $\Rightarrow$ convergence. Intégrales de

référence : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$; $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$; $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge ssi $\lambda > 0$; $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge.

Théorème — comparaison (fonctions positives)

Si $0 \leq f \leq g$ et g intégrable, alors f intégrable. Si $f \sim g$ en b (positives), même nature. Si $f = O(g)$, g intégrable $\Rightarrow f$ intégrable. Attention : f intégrable sur $[a, +\infty[$ n'implique pas $f \rightarrow 0$.

Théorème — convergence dominée

Si (f_n) converge simplement vers f sur I (fonctions continues par morceaux) et s'il existe φ intégrable sur I avec $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n (**hypothèse de domination**), alors f est intégrable et

$$\int_I f_n \rightarrow \int_I f.$$

Théorème — intégration terme à terme

Si $\sum u_n$ converge simplement vers S (fonctions intégrables sur I) et si $\sum \int_I |u_n| < +\infty$, alors S est intégrable et $\int_I S = \sum \int_I u_n$.

Théorème — intégrales à paramètre $F(x) = \int_I f(x, t) \, dt$

Continuité : si f est continue en x , continue par morceaux en t , et dominée $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ intégrable (domination locale possible), alors F est continue.

Dérivation : si de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue en x , continue par morceaux en t et dominée, alors F est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Exemple

Fonction **Gamma** : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$,

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème de convergence dominée ?

Si $f_n \rightarrow f$ simplement et $|f_n| \leq \varphi$ intégrable indépendante de n , alors $\int f_n \rightarrow \int f$.

Comment montrer qu'une intégrale impropre converge ?

Par comparaison avec les intégrales de référence ($\int \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int e^{-\lambda t} dt$), par équivalent en la borne singulière, ou en montrant la convergence absolue.

Comment dériver sous le signe intégral ?

Il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, soit continue en x , continue par morceaux en t , et dominée par une fonction intégrable ; alors $F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Qu'est-ce que la fonction Gamma ?

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ pour $x > 0$, avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.