

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Le **théorème spectral** : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Définition — produit scalaire, norme

Forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle$; $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. **Cauchy-Schwarz** : $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ avec égalité ssi x, y colinéaires. Inégalité triangulaire ; identité du parallélogramme ; polarisation $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$. Exemples :

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \text{ sur } \mathbb{R}^n, \langle f, g \rangle = \int_a^b fg \text{ sur } \mathcal{C}([a, b]), \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B).$$

Définition — orthogonalité, Gram-Schmidt

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. **Pythagore** :

$x \perp y \Leftrightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$. Le procédé de **Gram-Schmidt** transforme toute famille libre (x_i) en une famille orthonormale (e_i) avec $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.

Tout espace euclidien admet une base orthonormée ; dans une telle base,

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i \text{ et } x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Théorème — projection orthogonale

Si F est de dimension finie, $E = F \oplus F^\perp$ et la projection orthogonale sur F est

$p_F(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$ pour (e_i) base orthonormée de F . **Distance** :

$$d(x, F) = |x - p_F(x)| = \min_{y \in F} |x - y| ; \text{ inégalité de Bessel } \sum \langle x, e_i \rangle^2 \leq |x|^2.$$

Définition — endomorphismes symétriques

u est **symétrique** (autoadjoint) si $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$; en base orthonormée, sa matrice est symétrique. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral

Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée. Matriciellement : pour toute S symétrique réelle, il existe P orthogonale ($P^{-1} = P^T$) avec $P^T S P$ diagonale. Une matrice symétrique est **positive** (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont ≥ 0 (resp. > 0).

Définition — isométries, matrices orthogonales

u est une isométrie si $|u(x)| = |x|$; équivaut à conserver le produit scalaire, à envoyer une base orthonormée sur une base orthonormée, à $A^T A = I_n$. Groupe orthogonal $O(n)$, $\det = \pm 1$; $SO(n)$ (déterminant 1). En dimension 2 : rotations $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et réflexions. En dimension 3 : toute rotation est une rotation d'axe une droite, d'angle θ

avec $\text{tr} = 1 + 2\cos\theta$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème spectral ?

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée : $S = PDP^T$ avec P orthogonale.

Comment orthonormaliser une famille avec Gram-Schmidt ?

On retire à chaque vecteur ses projections sur les précédents déjà orthonormalisés, puis on normalise.

Comment calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace ?

$d(x, F) = |x - p_F(x)|$ où p_F est la projection orthogonale ; avec une base orthonormée (e_i) de F , $p_F(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$.

Qu'est-ce qu'une matrice orthogonale ?

Une matrice A telle que $A^T A = I_n$; ses colonnes forment une base orthonormée et $\det A = \pm 1$.