

Équations différentielles linéaires et systèmes

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de taille n est un **espace vectoriel de dimension n** ; à coefficients constants, la solution est $e^{tA}X_0$.

Théorème — Cauchy linéaire

Pour $A:I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B:I \rightarrow \mathbb{K}^n$ continues, tout problème de Cauchy $X' = A(t)X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$ admet une **unique solution** définie sur I tout entier. Les solutions de l'équation homogène forment un sous-espace S_H de dimension n ; les solutions de l'équation complète forment un espace affine $X_p + S_H$.

Définition — système fondamental, wronskien

Une base $(X_1, \dots, X_n)$ de S_H est un **système fondamental** ; le **wronskien** $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$ ne s'annule jamais ou est identiquement nul. **Variation des constantes** : $X_p = \sum c_i(t)X_i$ avec $\sum c_i'(t)X_i(t) = B(t)$.

Définition — exponentielle de matrice

$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ (série normalement convergente). $e^{A+B} = e^A e^B$ si $AB = BA$;
 $e^{PDP^{-1}} = P e^D P^{-1}$; $\det e^A = e^{\text{tr} A}$; $t \rightarrow e^{tA}$ est dérivable de dérivée $A e^{tA}$.

Théorème — coefficients constants

Les solutions de $X' = AX$ sont les $X(t) = e^{tA}X_0$. En pratique : réduire A . Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$, les solutions sont $\sum c_i e^{\lambda_i t} V_i$ (V_i vecteurs propres). Si A est trigonalisable seulement, on résout le système triangulaire de bas en haut (solutions polynômes-exponentielles).

Définition — équation scalaire d'ordre 2

$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ se ramène au système en (y, y') . Espace des solutions homogènes de dimension 2 ; wronskien $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ vérifiant $W' = -aW$. Si l'on connaît une solution y_1 ne s'annulant pas, on cherche $y = y_1 z$ (**abaissement de l'ordre**). Variation des constantes : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ avec $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$ et $c_1' y_1' + c_2' y_2' = c$.

Exemple

$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$: $e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $x(t) = (x_0 + y_0 t)e^t$, $y(t) = y_0 e^t$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème de Cauchy linéaire ?

Pour A et B continues sur I , tout problème de Cauchy $X' = A(t)X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$ admet une unique solution définie sur I tout entier.

Comment résoudre $X' = AX$ à coefficients constants ?

$X(t) = e^{tA}X_0$. En pratique, on diagonalise ou trigonalise A : les solutions sont des combinaisons de $e^{\lambda t}V$ pour les vecteurs propres V .

Qu'est-ce que le wronskien ?

Le déterminant $W(t)$ d'un système de solutions ; il est soit identiquement nul, soit jamais nul, et permet de vérifier qu'on a un système fondamental.

Comment résoudre une équation d'ordre 2 dont on connaît une solution ?

On pose $y = y_1 z$ (abaissement de l'ordre) : on obtient une équation d'ordre 1 en z' .