

Produit scalaire

Quatre expressions du produit scalaire, à choisir selon les données ; deux vecteurs sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Définition — produit scalaire

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Si l'un est nul, le produit scalaire vaut 0.

Propriété — autres expressions

- Projeté : si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ,
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \pm AB \times AH$.
- Normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$.
- Coordonnées (repère orthonormé) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$; $|\vec{u}|^2 = x^2 + y^2$.

Propriétés

Symétrie $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; bilinéarité $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.
 Identités : $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$.

Théorème — orthogonalité

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. En coordonnées : $xx' + yy' = 0$.

Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos \widehat{A}.$$

(Pythagore généralisé.)

Exemple

$\vec{u}(3; -1)$, $\vec{v}(2; 6)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 6 = 0$, les vecteurs sont orthogonaux.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment calculer un produit scalaire ?

Avec les coordonnées $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, avec les normes et l'angle $|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, ou par projection orthogonale.

À quoi sert le produit scalaire ?

À prouver l'orthogonalité ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$), à calculer un angle, une longueur (formule d'Al-Kashi) et à trouver des équations de droites ou de cercles.

Qu'est-ce que la formule d'Al-Kashi ?

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$: une généralisation de Pythagore à tous les triangles.

Comment calculer un angle avec le produit scalaire ?

$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$, puis $\theta = \arccos(. . .)$.