

Probabilités conditionnelles et indépendance

$P_A(B)$ est la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Définition — probabilité conditionnelle

Pour $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ donc } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Propriété — arbre pondéré

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches (probabilité d'une intersection).
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

Formule des probabilités totales

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

$$\text{Cas courant : } P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Définition — indépendance

A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) = P(B)$ (lorsque $P(A) \neq 0$). Si A et B sont indépendants, $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Exemple

Une usine : 60 % de pièces de la machine M_1 (défectueuses à 2 %), 40 % de M_2 (défectueuses à 5 %). $P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032$. Sachant qu'une pièce est défectueuse, $P_D(M_2) = \frac{0,02}{0,032} = 0,625$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Comment savoir si deux événements sont indépendants ?

Ils sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) = P(B)$.

Qu'est-ce que la formule des probabilités totales ?

Pour une partition $A_1, \dots, A_n$ de l'univers :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = \sum P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Comment utiliser un arbre pondéré ?

On multiplie les probabilités le long d'un chemin pour obtenir une intersection, et on additionne les chemins qui mènent au même événement final.