

Étude de fonctions : valeur absolue, composées et modélisation

Optimiser, c'est **modéliser** par une fonction puis lire son **tableau de variations**.

Définition — valeur absolue

$f(x) = |x|$ vaut x si $x \geq 0$ et $-x$ si $x < 0$; paire, décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$, courbe en « V ». $|x-a| = r \Leftrightarrow x = a \pm r$.

Propriété — variations de fonctions associées

Sur un intervalle I où u est monotone :

- $u+k$ a les mêmes variations que u ;
- λu a les mêmes variations si $\lambda > 0$, les variations contraires si $\lambda < 0$;
- $\sqrt{u}$ (si $u \geq 0$) a les mêmes variations que u ;
- $\frac{1}{u}$ (si u ne s'annule pas et garde un signe constant) a les variations contraires ;
- u^2 a les mêmes variations là où $u \geq 0$, contraires là où $u \leq 0$.

Méthode — résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable x et son intervalle de validité.
2. Exprimer la grandeur à optimiser $f(x)$.
3. Dériver, étudier le signe de f' , dresser le tableau de variations.
4. Conclure : valeur optimale et valeur de x correspondante.

Exemple

Boîte sans couvercle fabriquée à partir d'un carré de 12 cm en découpant des carrés de côté x aux coins : $V(x) = x(12-2x)^2$ sur $]0;6[$. $V'(x) = (12-2x)(12-6x)$, maximum en $x = 2$: $V = 128 \text{ cm}^3$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment dériver une fonction composée en première ?

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, (u^n)' = nu'u^{n-1}, (e^u)' = u'e^u, \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Quelles sont les variations de la fonction valeur absolue ?

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $-x$ sinon : décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$, avec un minimum 0 en 0 où elle n'est pas dérivable.

Comment étudier une fonction complètement ?

Ensemble de définition, dérivée, signe de la dérivée, tableau de variations, puis résolution des questions posées (extremum, équation, tangente).

Comment résoudre $|x - a| = r$?

Les solutions sont $x = a + r$ et $x = a - r$; $|x - a| \leq r$ équivaut à $x \in [a - r; a + r]$.