Vecteurs, droites et plans de l'espace

Un plan est défini par un point et **deux vecteurs non colinéaires** ; une droite par un point et un **vecteur directeur**.

Définition — vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'il existe des représentants dans un même plan, c'est-à-dire si l'un s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres. Trois vecteurs non coplanaires forment une **base** de l'espace ; tout vecteur s'écrit alors de façon unique $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Propriété — coordonnées

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$; milieu de $[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ldots\right)$; en repère orthonormé $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Définition — représentation paramétrique d'une droite

Droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$:

$$\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Définition — représentation paramétrique d'un plan

Plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : $M=A+t\vec{u}+s\vec{v}$, $(t;s)\in\mathbb{R}^2$.

Propriété — positions relatives

- Deux droites : coplanaires (sécantes ou parallèles) ou **non coplanaires**.
- Droite et plan : incluse, strictement parallèle ou sécante en un point.
- Deux plans : confondus, strictement parallèles ou sécants selon une droite.

Méthode — intersection droite / plan

On injecte les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation du plan et on résout en t : une solution (point), aucune (parallèle stricte), une infinité (incluse).

Questions fréquentes sur ce chapitre

Comment paramétrer une droite de l'espace ?

Avec un point A et un vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$: $x=x_A+at$, $y=y_A+bt$, $z=z_A+ct$, $t\in\mathbb{R}$.

Comment montrer que trois vecteurs sont coplanaires ?

On montre que l'un est combinaison linéaire des deux autres ; sinon ils forment une base de l'espace.

Quelles sont les positions relatives de deux droites dans l'espace ?

Sécantes, parallèles (strictement ou confondues) ou non coplanaires. Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.

Comment trouver l'intersection d'une droite et d'un plan ?

On remplace x, y, z de la représentation paramétrique de la droite dans l'équation du plan, on résout en t, puis on calcule le point.