Variables aléatoires

Une variable aléatoire associe un **nombre** à chaque issue ; son **espérance** est la moyenne attendue sur un grand nombre de répétitions.

Définition — variable aléatoire, loi

Une **variable aléatoire** X est une fonction de l'univers vers $\mathbb{R}$. Sa **loi** est la donnée des valeurs x_i et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, avec $\sum p_i = 1$.

Définition — espérance, variance, écart-type

$$E(X) = \sum_i p_i x_i \quad V(X) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriété — linéarité

$E(aX+b) = aE(X)+b$, $V(aX+b) = a^2 V(X)$, $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Exemple

Jeu : on gagne 5 € avec probabilité $0{,}2$, on perd 2 € sinon.
$E(X) = 0{,}2\times 5 - 0{,}8\times 2 = -0{,}6$: le jeu est défavorable au joueur (perte moyenne de $0{,}60$ € par partie).

Propriété — interprétation

Quand on répète l'expérience un grand nombre de fois, la moyenne des valeurs observées se rapproche de $E(X)$ (loi des grands nombres). Un jeu est **équitable** si $E(X) = 0$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

Une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire, par exemple le gain d'un jeu.

Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire ?

$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$: la moyenne des valeurs pondérées par leurs probabilités. Elle s'interprète comme la valeur moyenne sur un grand nombre de répétitions.

Comment calculer la variance ?

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ou $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$; l'écart-type est $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Que signifie un jeu équitable ?

Un jeu dont l'espérance de gain est nulle : en moyenne, on ne gagne ni ne perd.