Suites et séries de fonctions

La **convergence uniforme** transmet la continuité et permet d'intervertir limite et intégrale ; la **convergence normale** est le moyen usuel de la prouver pour les séries.

Définition — modes de convergence

$f_n \to f$ **simplement** sur A si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout x ; **uniformément** si $|f_n - f|_\infty = \sup_A |f_n - f| \to 0$. Pour une série $\sum u_n$: convergence **normale** si $\sum |u_n|_\infty$ converge ; normale $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ simple. Uniforme ssi $|R_n|_\infty \to 0$.

Théorème — continuité, double limite

Si les f_n sont continues et $f_n \to f$ uniformément (au moins localement), alors f est continue. **Double limite** : si $f_n \to f$ uniformément sur A et $f_n(x) \to \ell_n$ quand $x \to a$, alors (ℓ_n) converge et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim \ell_n$. Version séries : continuité de la somme, interversion $\lim_{x\to a} \sum u_n(x) = \sum \lim_{x\to a} u_n(x)$.

Théorème — intégration sur un segment

Si $f_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$ (fonctions continues), $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$. Pour une série uniformément convergente : $\int_a^b \sum u_n = \sum \int_a^b u_n$.

Théorème — dérivation

Si les f_n sont $\mathcal{C}^1$, $f_n \to f$ **simplement** et $f'_n \to g$ **uniformément** (localement), alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$. Version séries : si $\sum u_n$ converge simplement et $\sum u'_n$ converge uniformément, la somme est $\mathcal{C}^1$ et se dérive terme à terme. Extension à $\mathcal{C}^k$.

Méthode — montrer une convergence uniforme

Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite indépendante de x tendant vers 0 ; ou étudier les variations de $f_n - f$; pour une série, chercher la convergence normale $\sup|u_n| \le a_n$ avec $\sum a_n$ convergente, ou utiliser le critère des séries alternées pour majorer le reste.

Exemple

$f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ converge simplement vers $1_{\{1\}}$, non continue : pas de convergence uniforme. $\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ (convergence normale sur $[a,+\infty[$, $a>1$).

Théorème — Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Quelle est la différence entre convergence simple et uniforme ?

Simple : $f_n(x) \to f(x)$ pour chaque x. Uniforme : $\sup|f_n - f| \to 0$, la vitesse ne dépend pas de x. Seule la convergence uniforme transmet la continuité.

Qu'est-ce que la convergence normale ?

$\sum |u_n|_\infty$ converge. Elle entraîne la convergence uniforme et c'est le moyen le plus courant de la prouver pour une série de fonctions.

Quand peut-on dériver terme à terme une série de fonctions ?

Si $\sum u_n$ converge simplement et $\sum u_n'$ converge uniformément (au moins localement), alors la somme est $\mathcal{C}^1$ et $S' = \sum u_n'$.

Que dit le théorème de la double limite ?

Si $f_n \to f$ uniformément et $\lim_{x \to a} f_n(x) = \ell_n$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_n \ell_n$: on peut échanger les deux limites.