Suites réelles

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une **borne supérieure** : c'est l'axiome qui fait fonctionner l'analyse réelle.

Théorème — borne supérieure

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure $\sup A$ (plus petit majorant). Caractérisation : $M = \sup A \Leftrightarrow M$ majore A et $\forall \epsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a > M - \epsilon$.

Définition — limite

$u_n \to \ell$ si $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon$. Une suite convergente est bornée et sa limite est unique.

Théorèmes de convergence

- Suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) : converge vers sa borne supérieure (resp. inférieure).
- Gendarmes et comparaison.
- **Suites adjacentes** (u croissante, v décroissante, $v_n - u_n \to 0$) : convergent vers la même limite.

Théorème — Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle **bornée** on peut extraire une sous-suite convergente. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.

Méthode — suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Trouver un intervalle I stable par f contenant u_0 ; si f est croissante sur I, (u_n) est monotone (sens donné par $u_1 - u_0$) ; les limites possibles sont les points fixes ; si f est k-lipschitzienne avec $k < 1$, convergence géométrique vers l'unique point fixe.

Définition — relations de comparaison

$u_n = o(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \to 0$; $u_n = O(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée ; $u_n \sim v_n$ si $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. Les équivalents se multiplient et se divisent mais ne s'additionnent pas ; ils se composent avec les puissances, pas avec $\ln$ ou $\exp$ en général.

Exemple

$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$; $\ln(n+1) \sim \ln n$; $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$.

Questions fréquentes sur ce chapitre

Que dit le théorème de Bolzano-Weierstrass ?

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Qu'est-ce que la borne supérieure ?

Le plus petit des majorants d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Elle existe toujours dans $\mathbb{R}$, contrairement à $\mathbb{Q}$.

Comment étudier une suite récurrente u(n+1) = f(u(n)) ?

Trouver un intervalle stable contenant u_0, étudier la monotonie de f (si f croît, la suite est monotone), identifier les points fixes comme limites possibles, puis conclure par convergence monotone.

Peut-on additionner des équivalents ?

Non : $n+1 \sim n$ et $-n \sim -n$ mais $(n+1)+(-n) = 1 \not\sim 0$. On peut les multiplier, diviser et élever à une puissance.